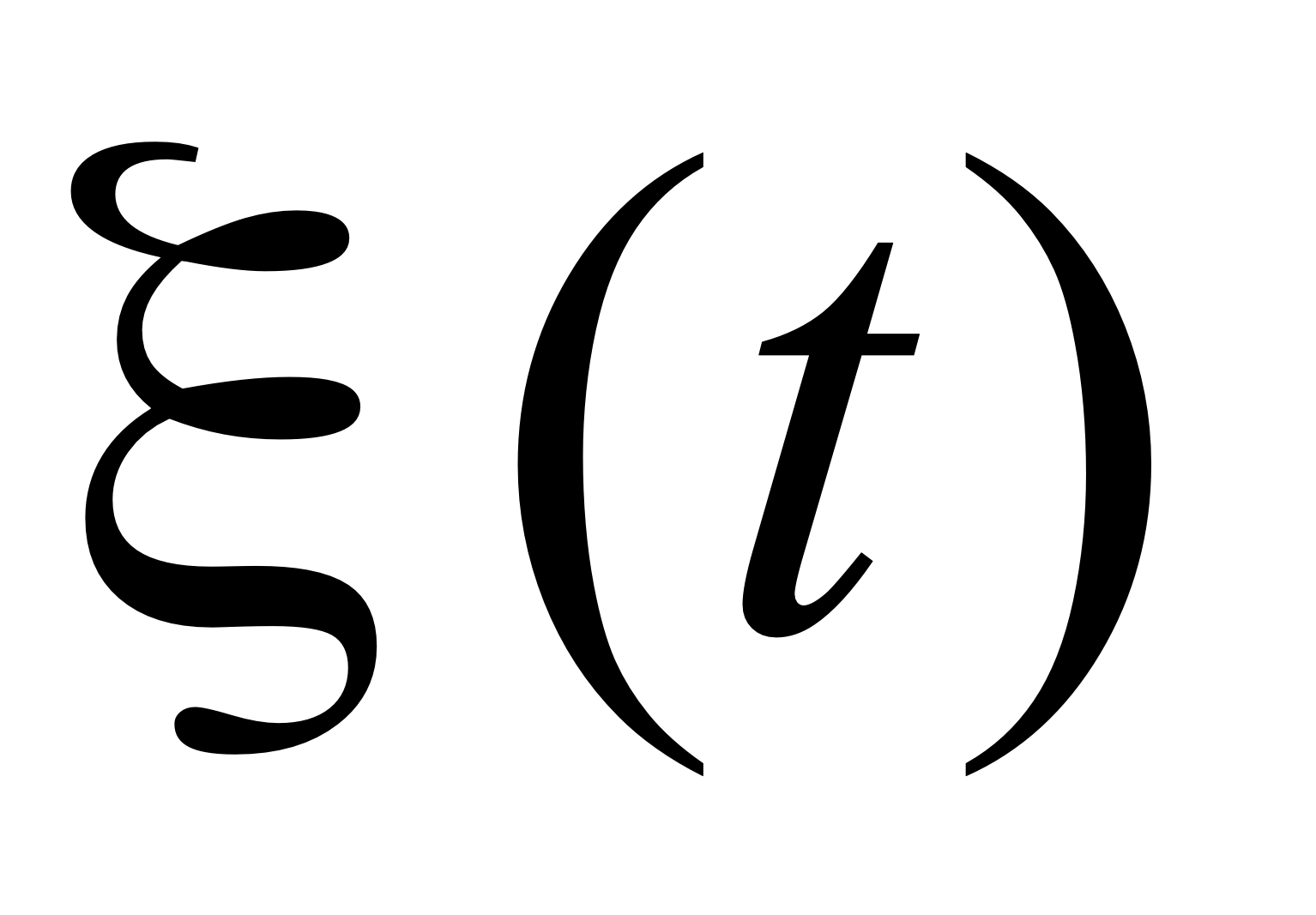
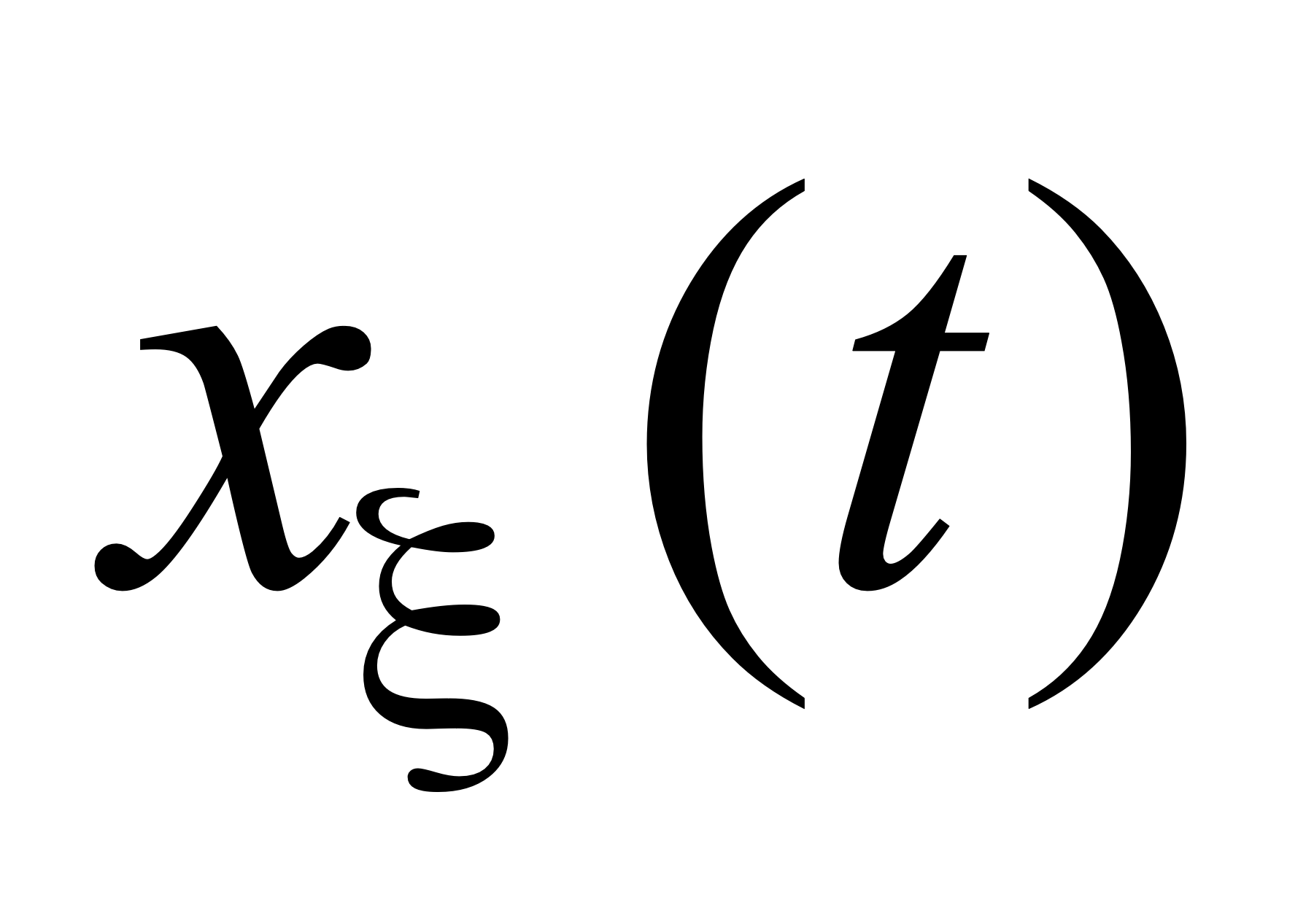
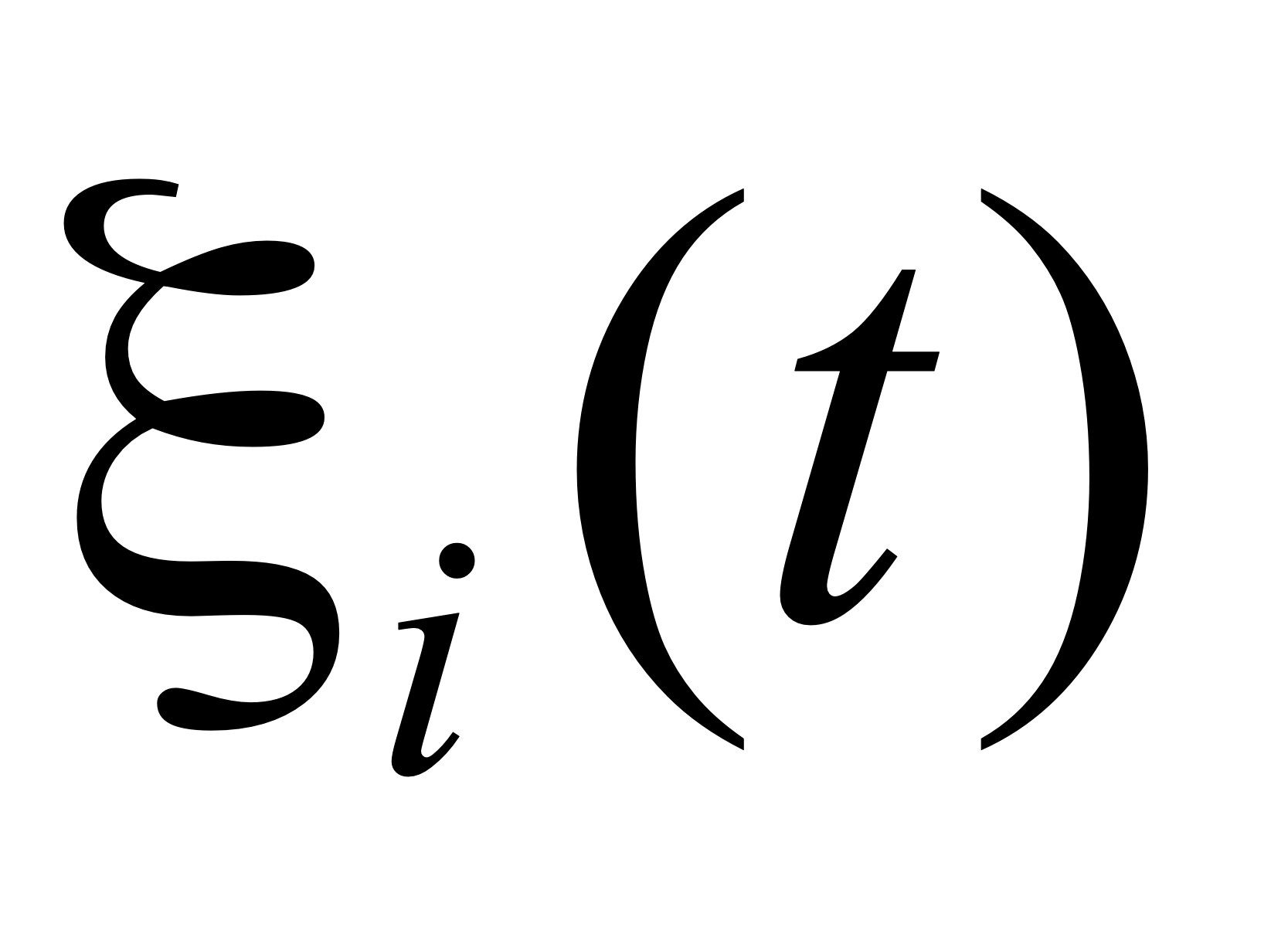
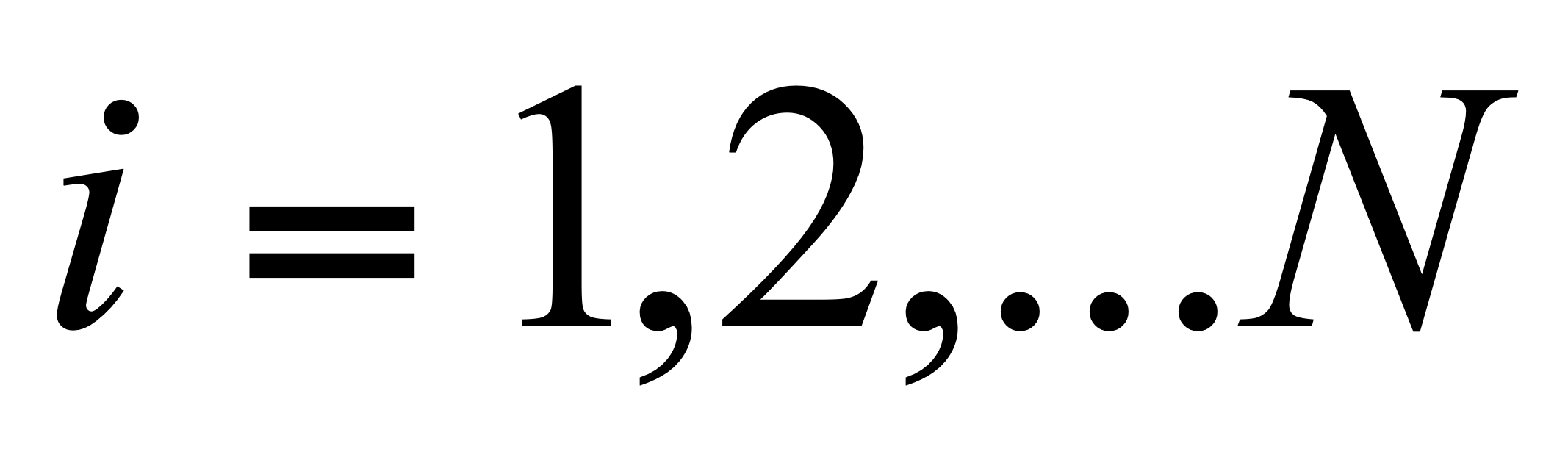
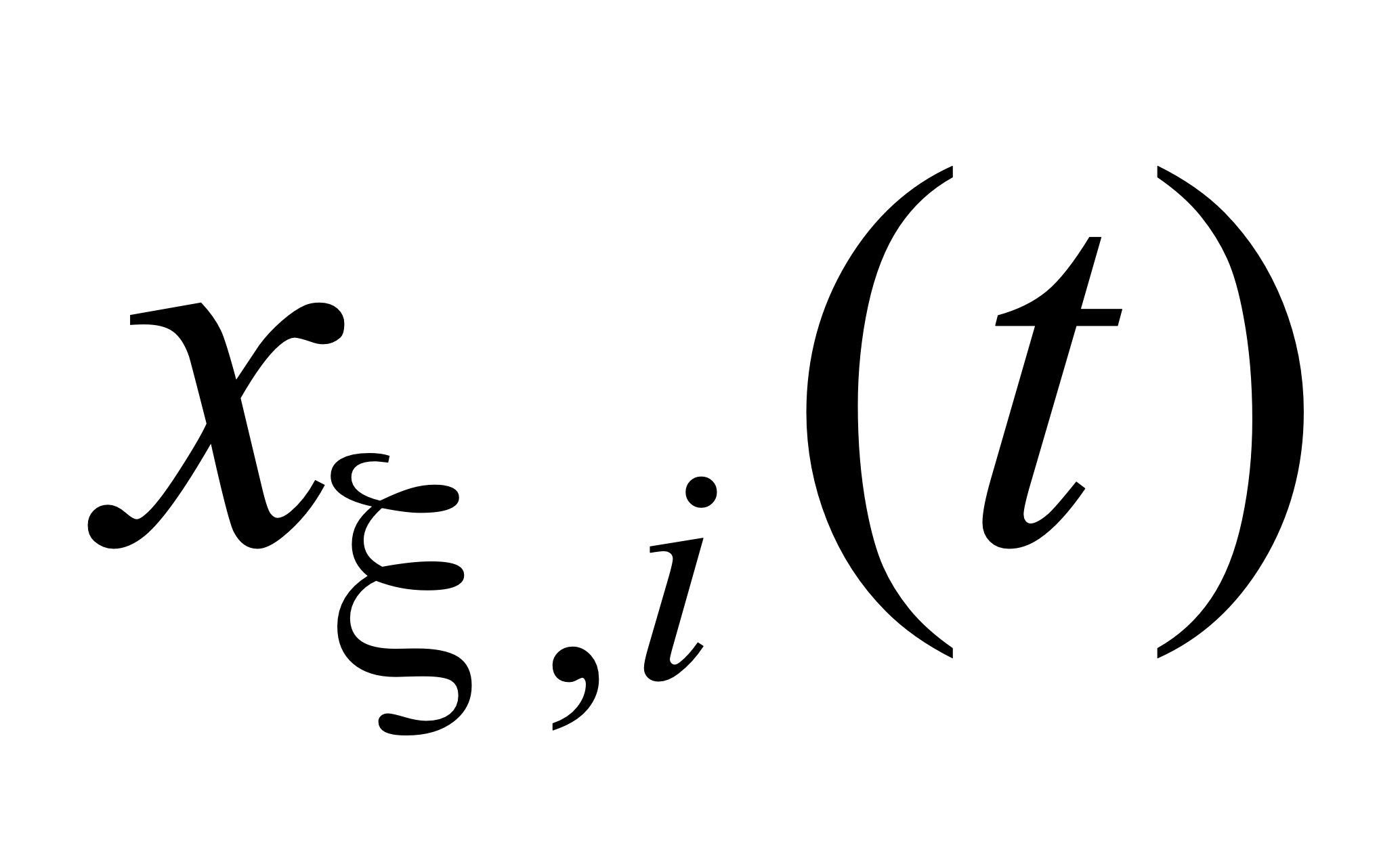
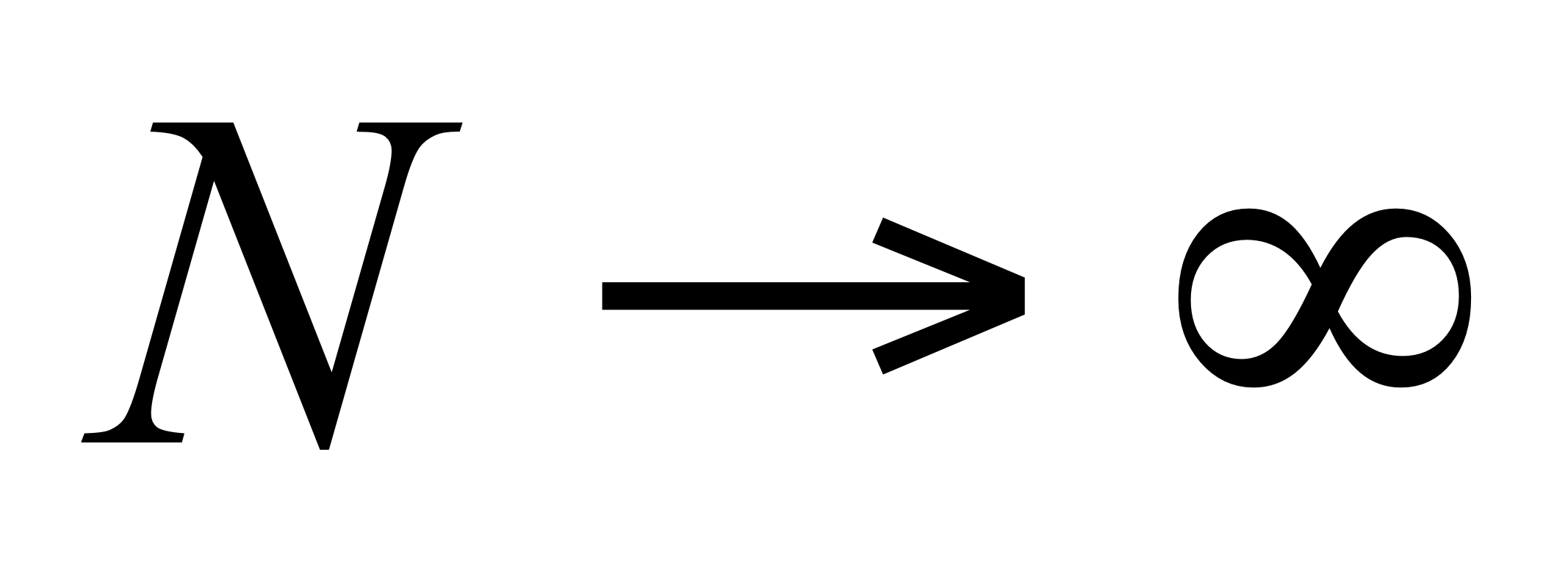
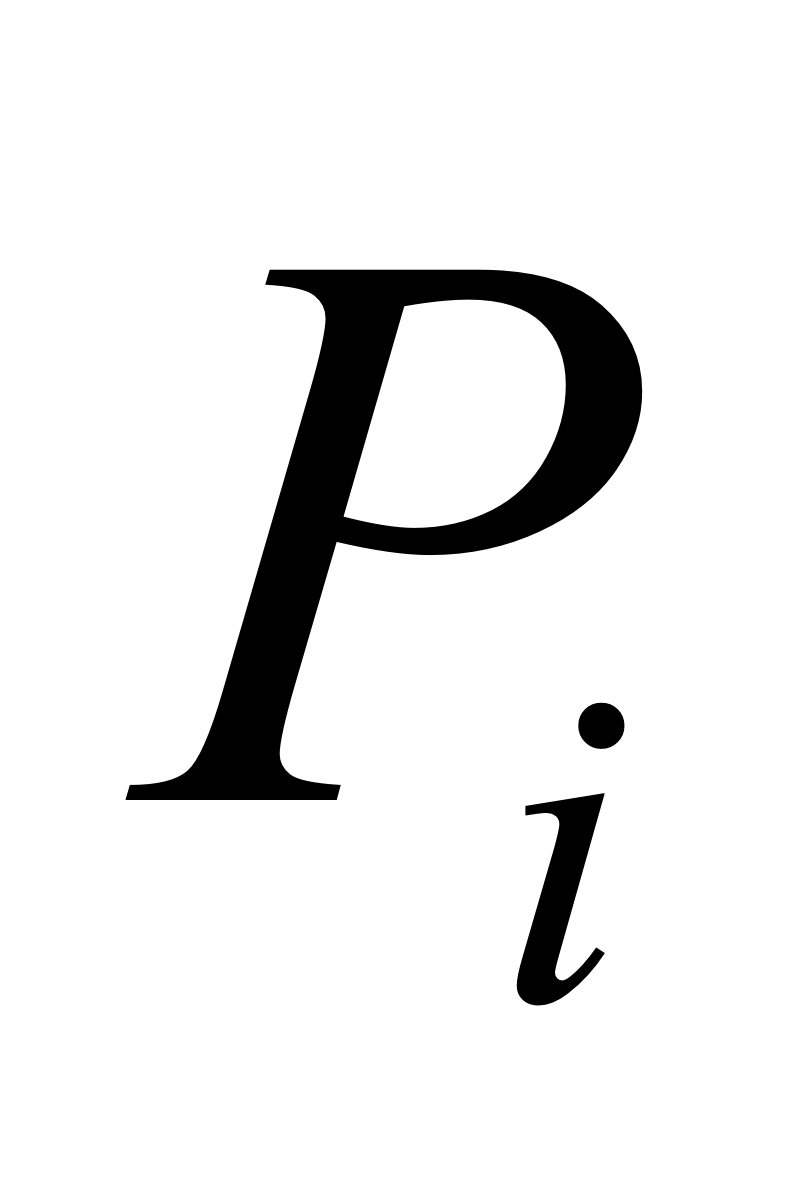
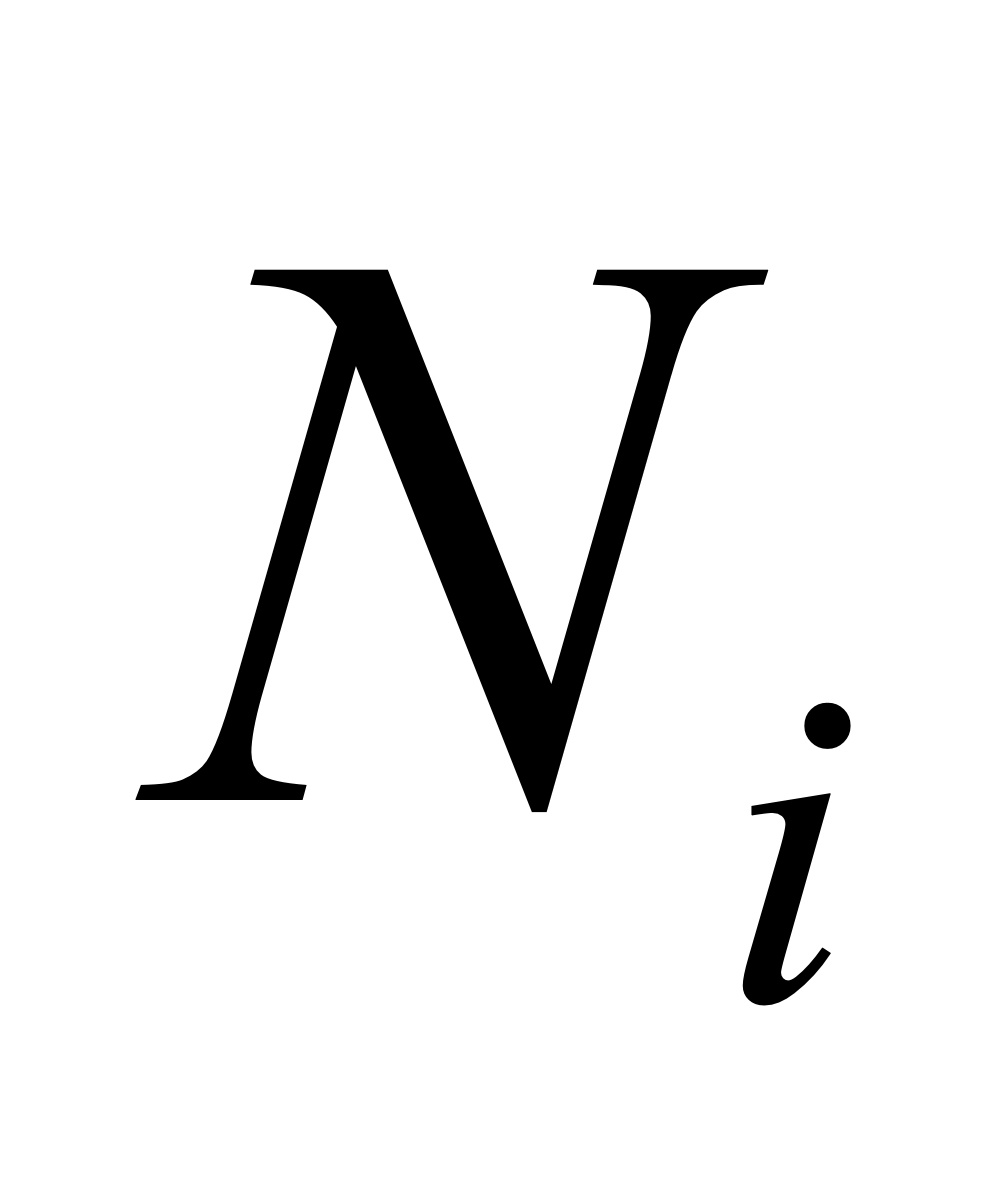
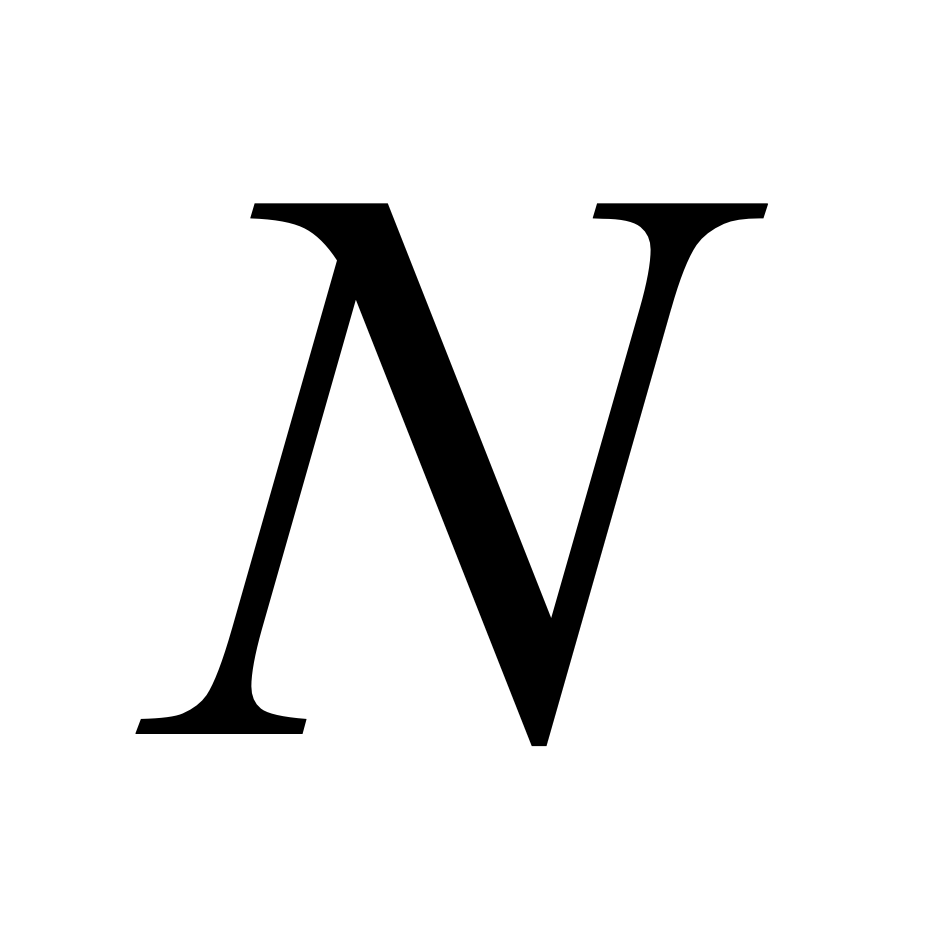
Лекция 2. **Спектры сигналов. Преобразование Фурье и Лапласа.**

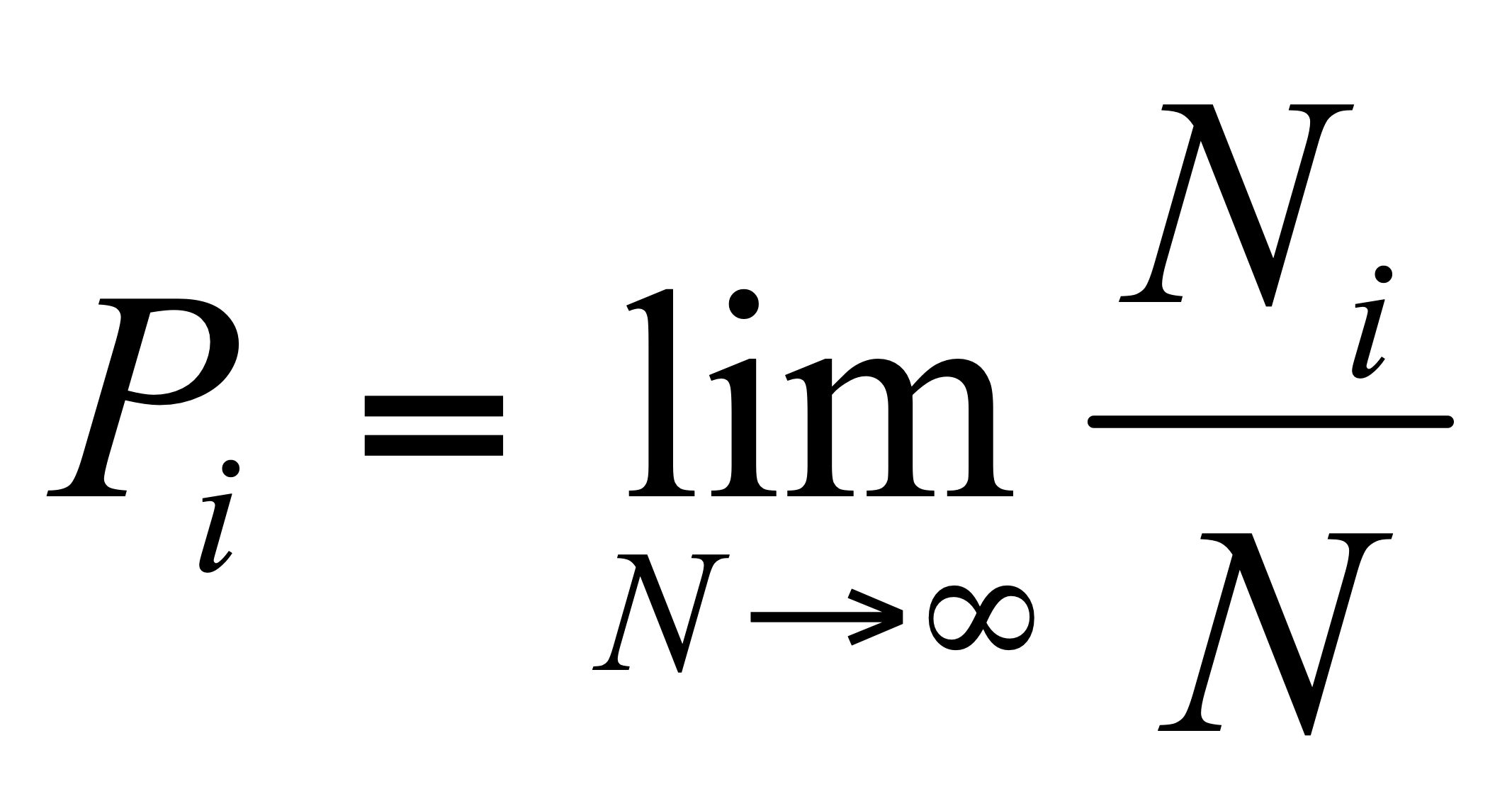
(Случайные сигналы)

Случайный сигнал, случайный процесс. Ансамбль реализаций. Распределения вероятностей, плотности вероятности. Преобразования вероятностей.

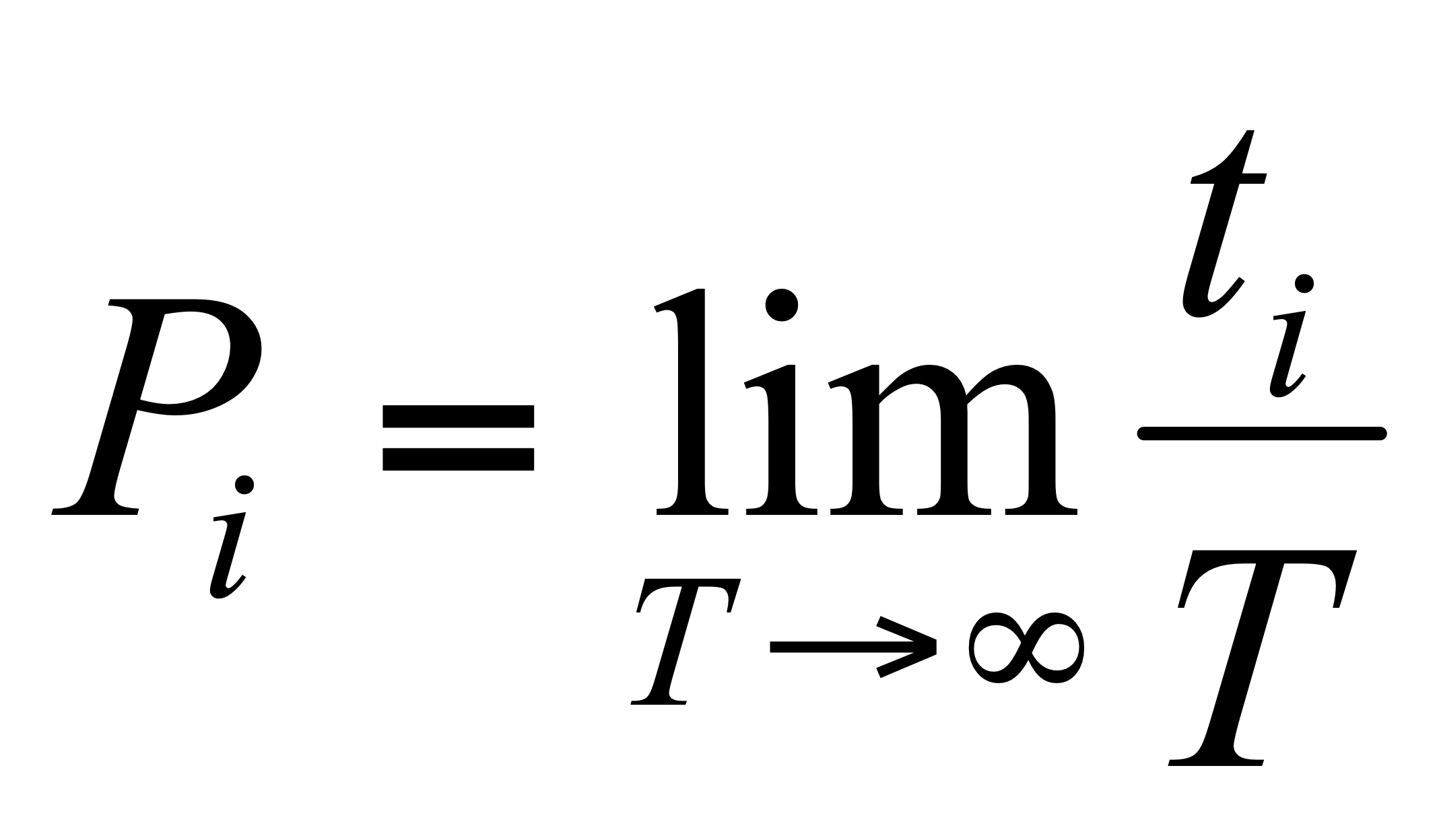
1. Математическая модель изменяющегося во времени случайного сигнала называется *случайным процессом*. Если - последовательность случайных чисел (значения случайных сил), то функцию особого вида – случайный процесс можем, обозначить как . В реальности имеем набор (ансамбль) случайных сил  (), этому соответствует ансамбль . Одна из этих функций, ансамбля ставшая полностью известной после приема сигнала, называется *реализацией* случайного процесса. Эту реализацию можно рассматривать как детерминированную (неслучайную) функцию времени. При  статистический ансамбль реализаций определяет случайный (стохастический) процесс.

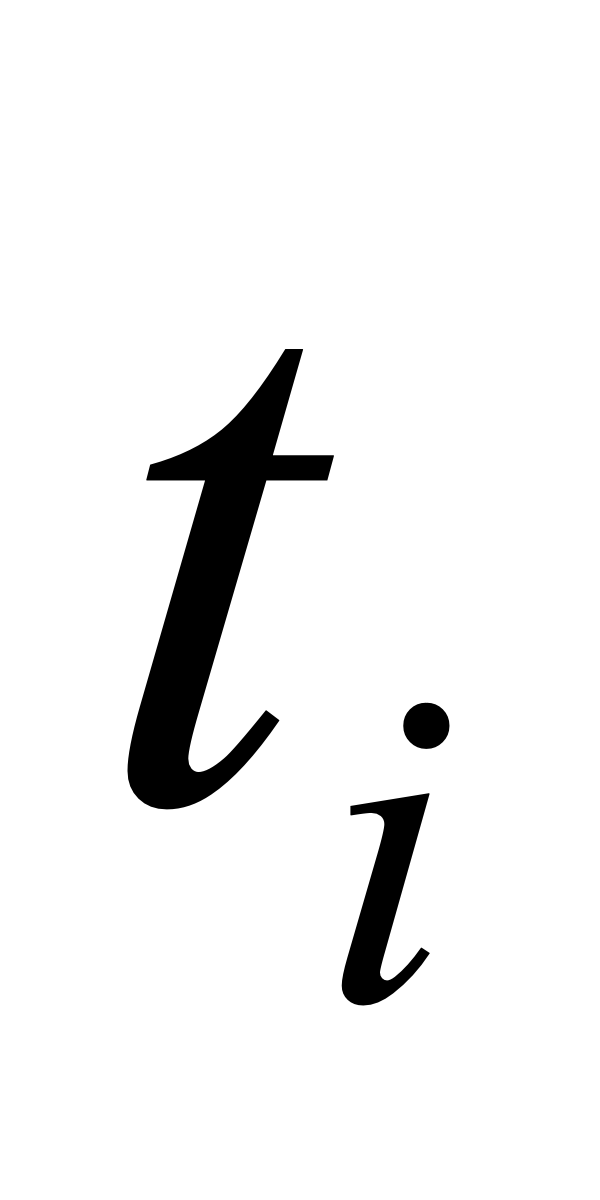
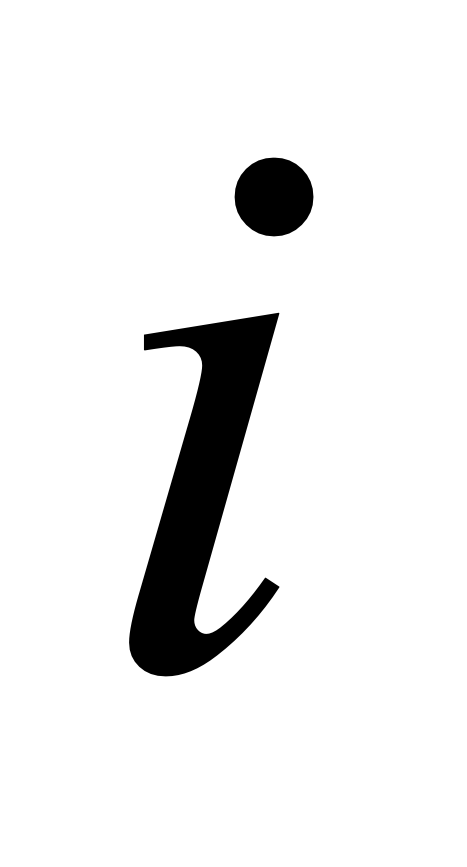
2. *Распределения вероятностей и плотности вероятности.*

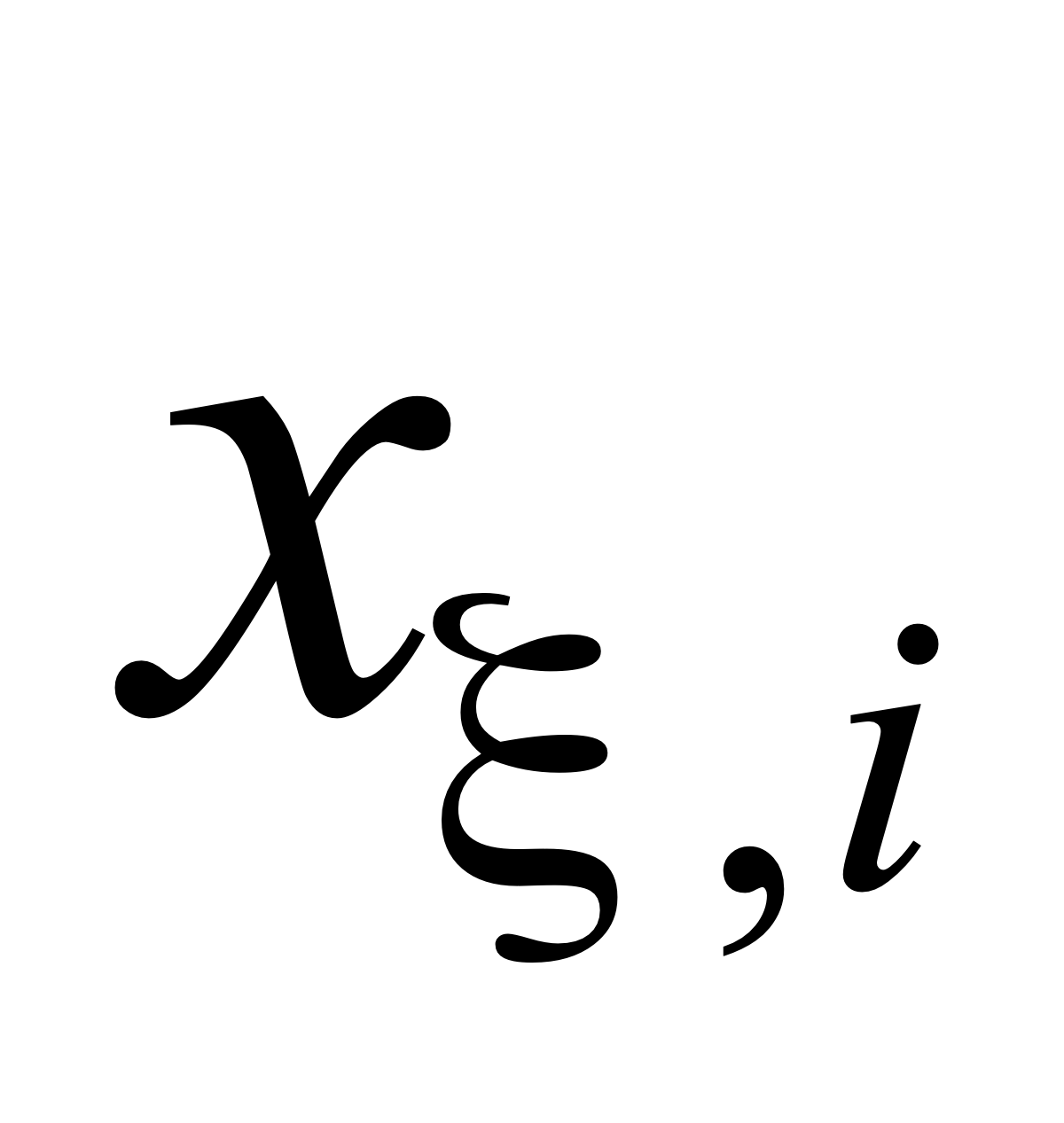
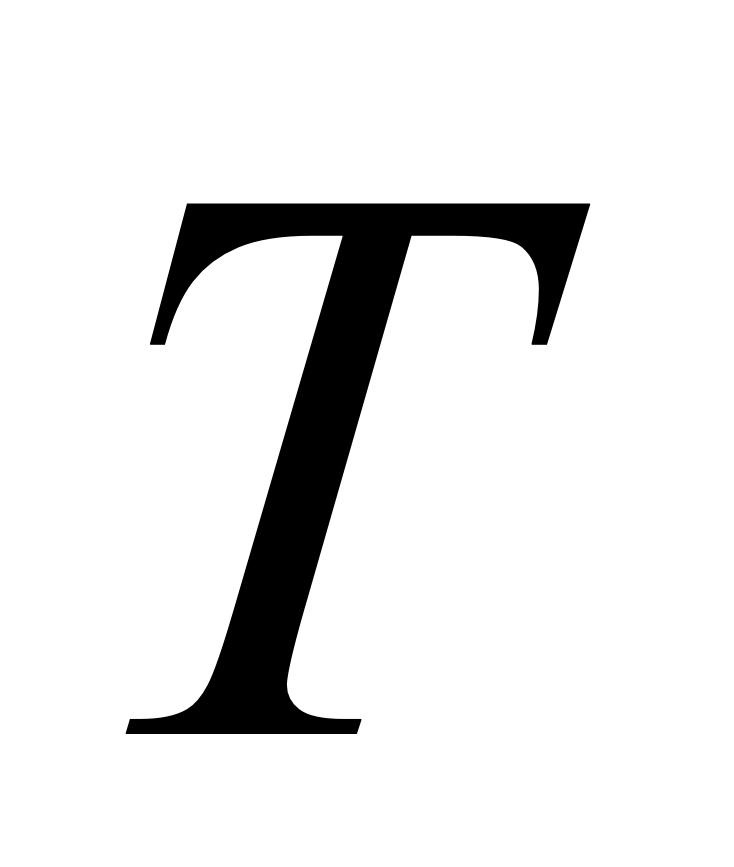
Мы назовем вероятностью  предел отношения числа измеренных значений физической величины (реализаций) : к полному числу измерений (числу элементов всего ансамбля), когда последнее неограниченно возрастает:

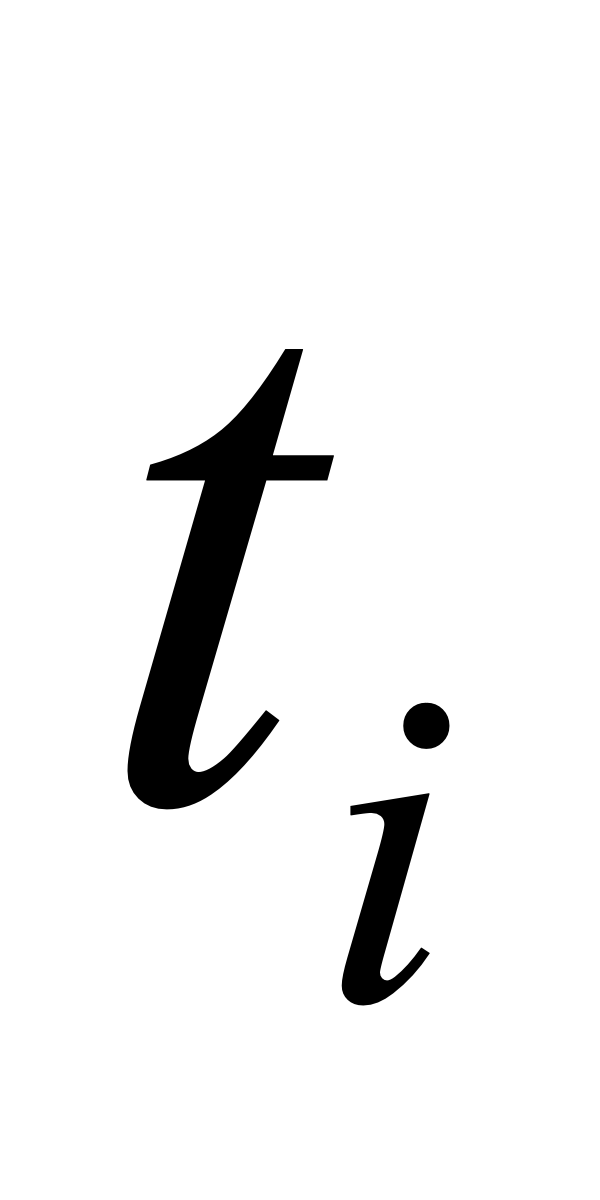
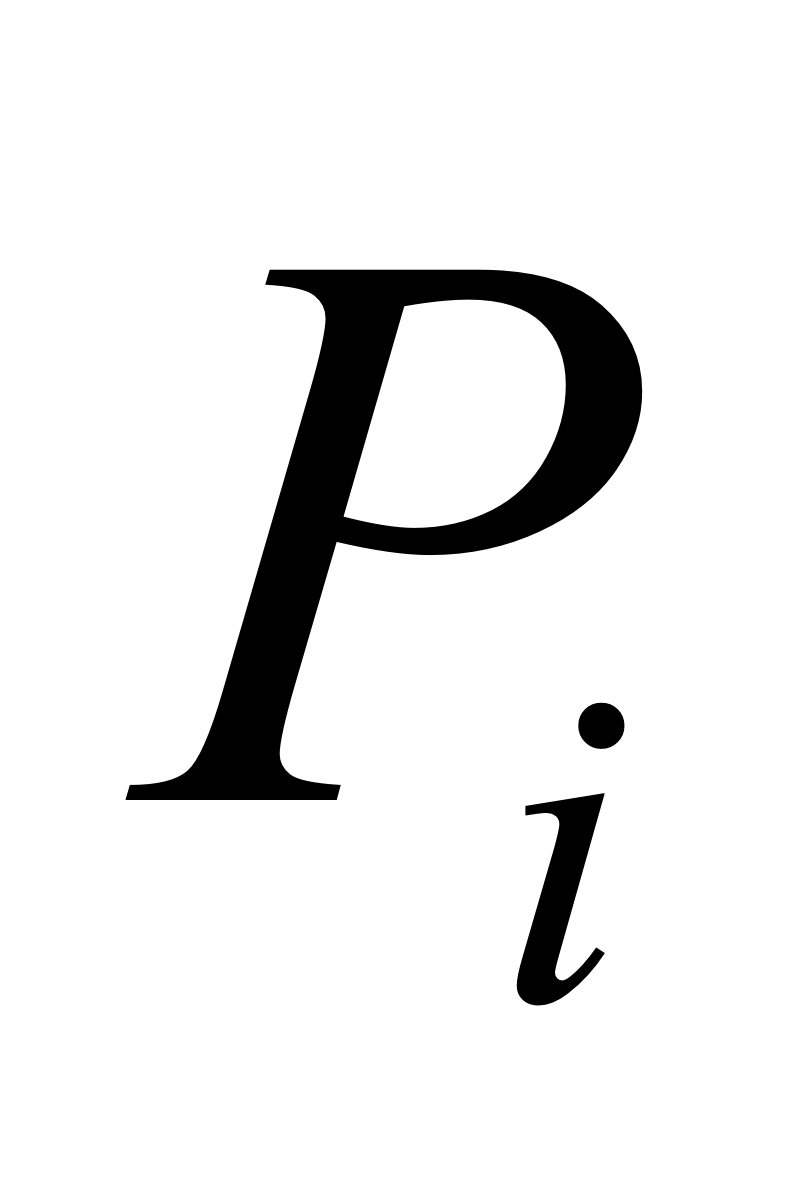
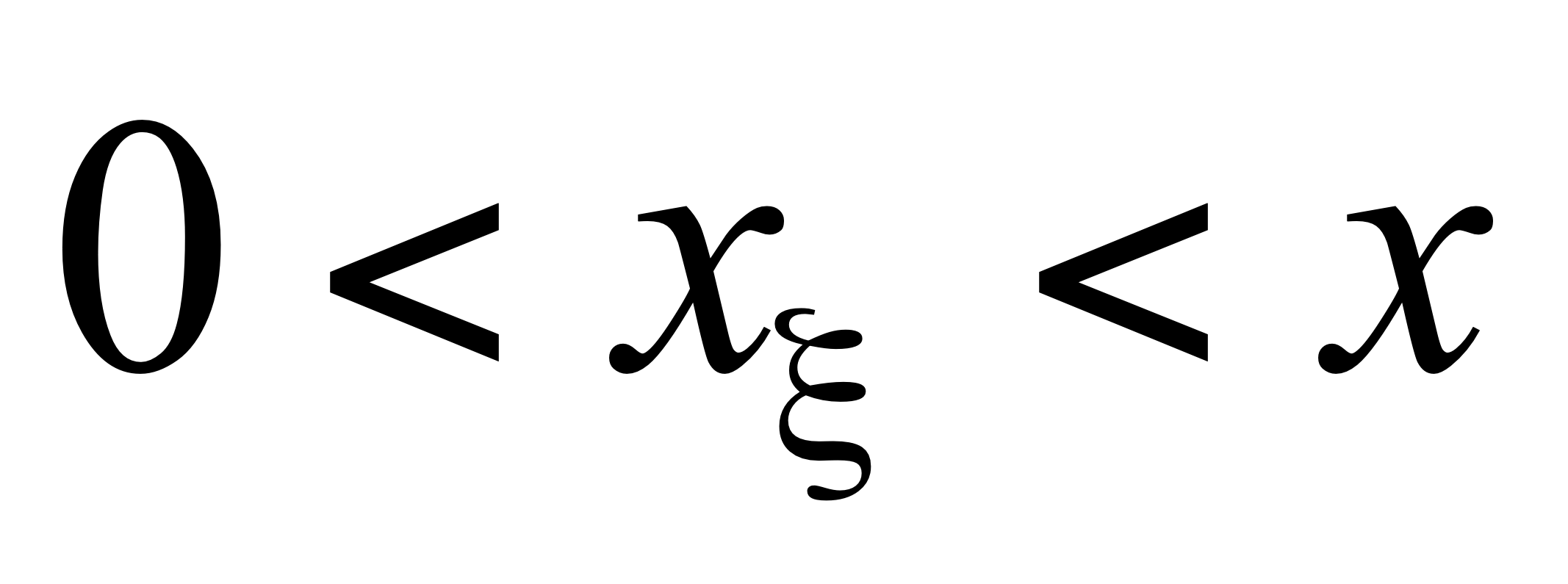
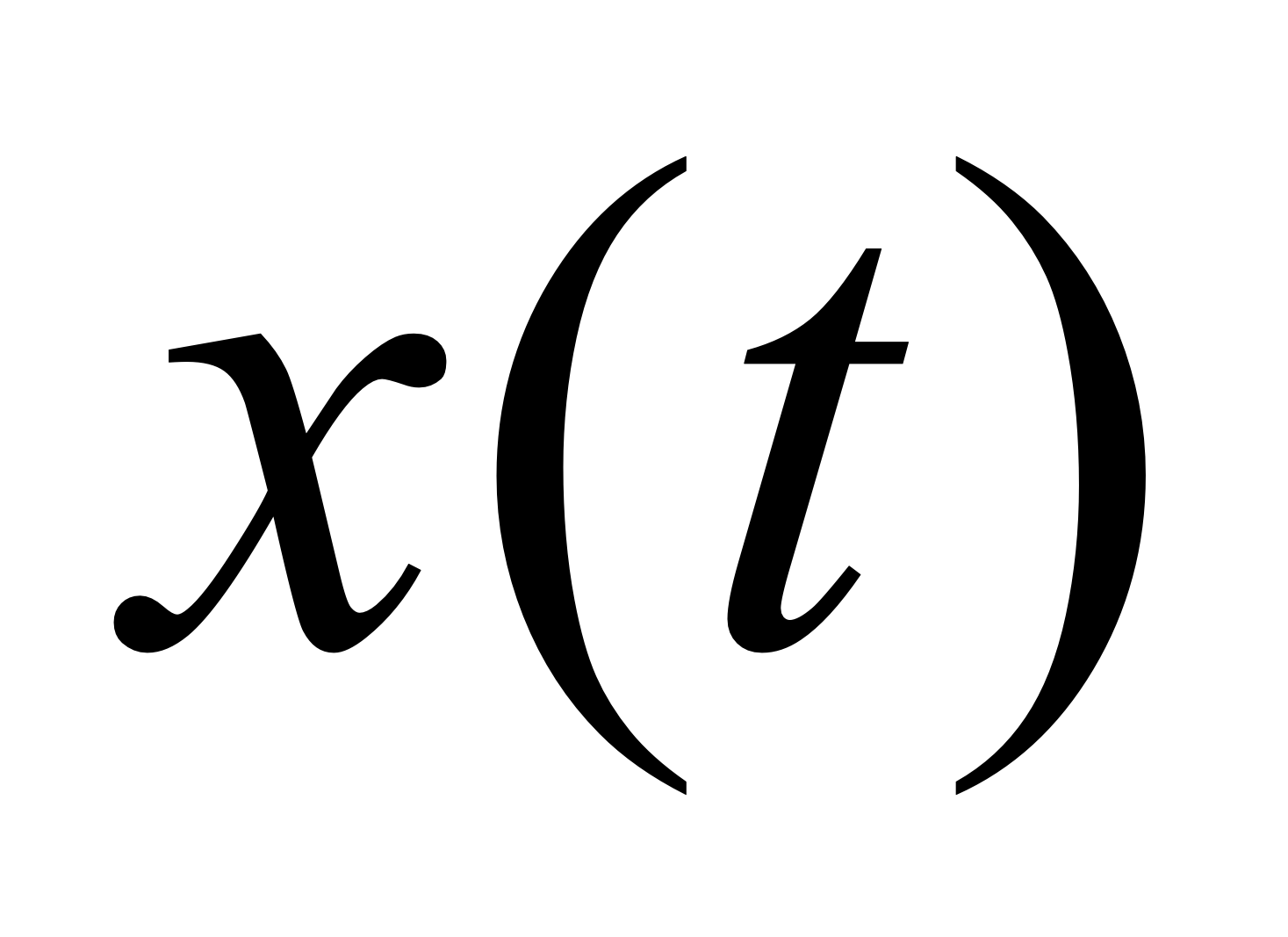
. (1)

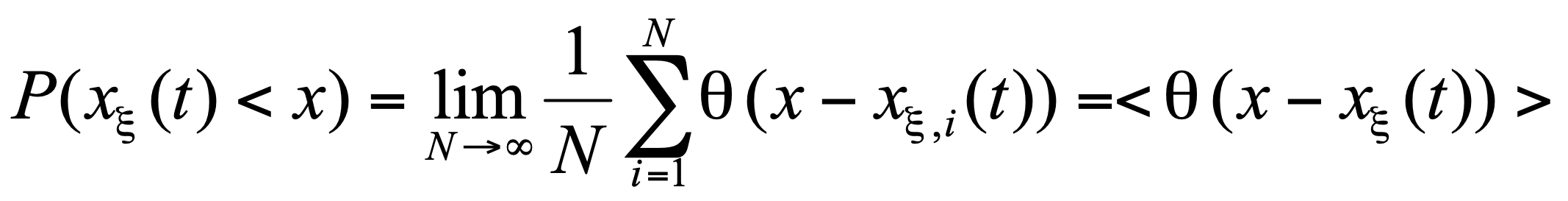
Эту формулу можно записать в следующем эквивалентном виде:

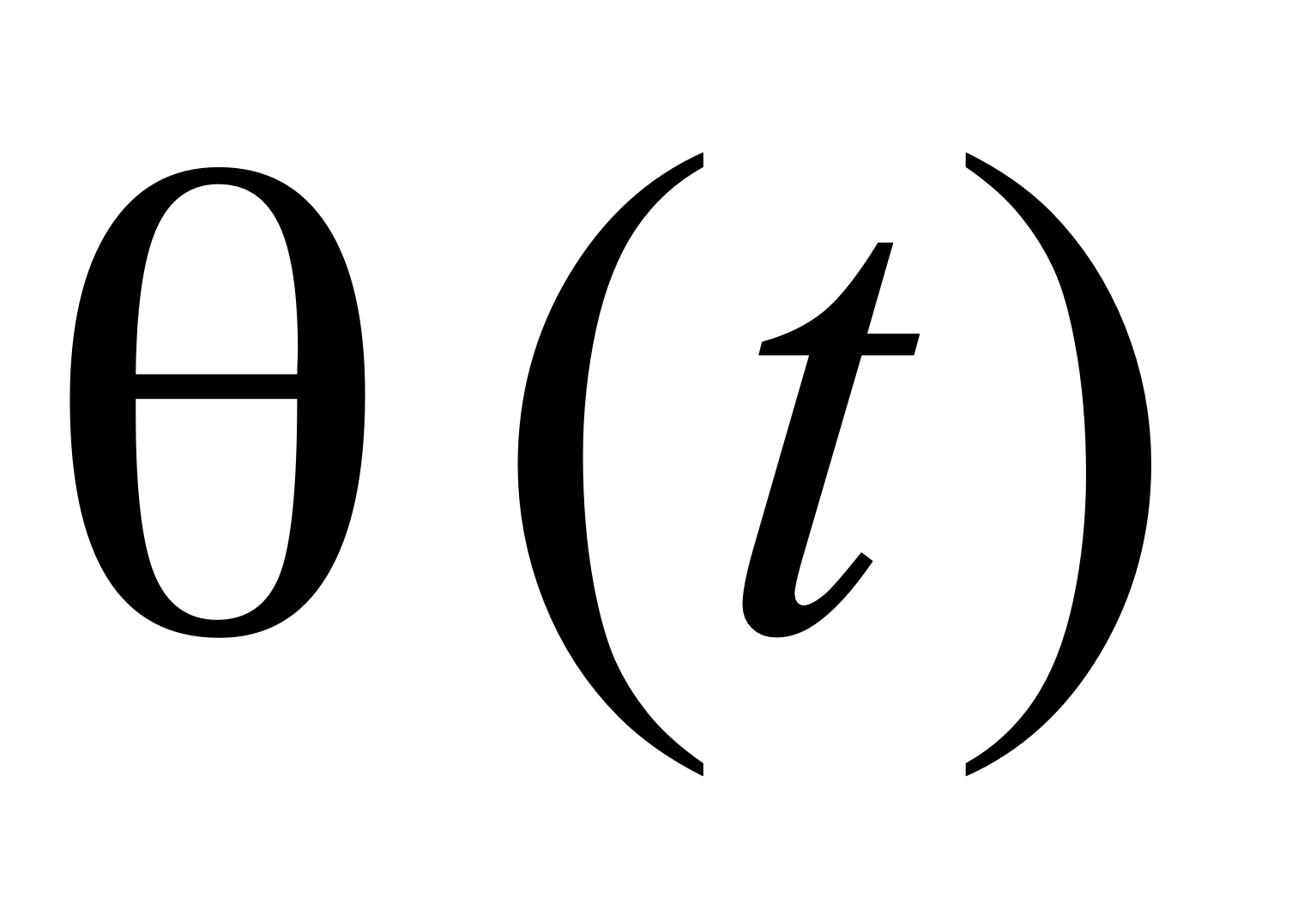
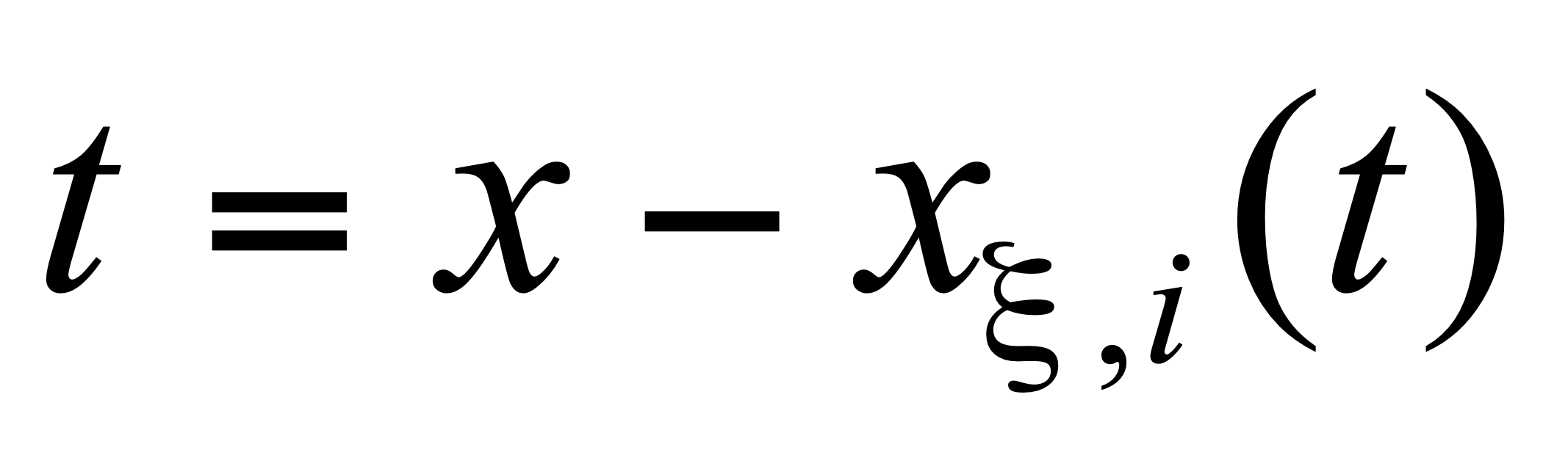
 , (2)

где - время, в течение которого система находится в состоянии 

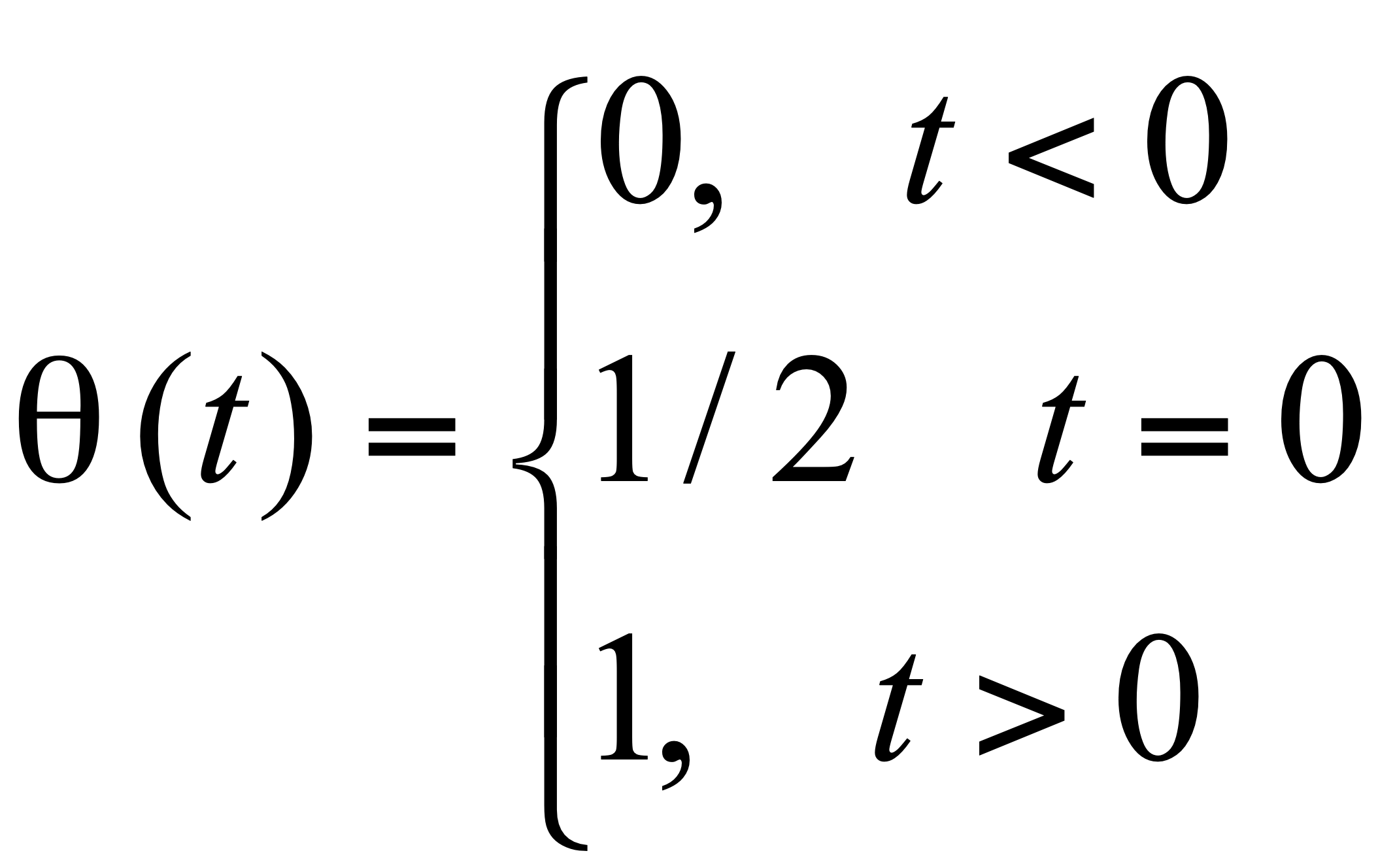
(со значением ),  - полное время наблюдения. Существование пределов в формулах (1), (2) будет обеспечено в том случае, когда система находится в неизменных внешних условиях.

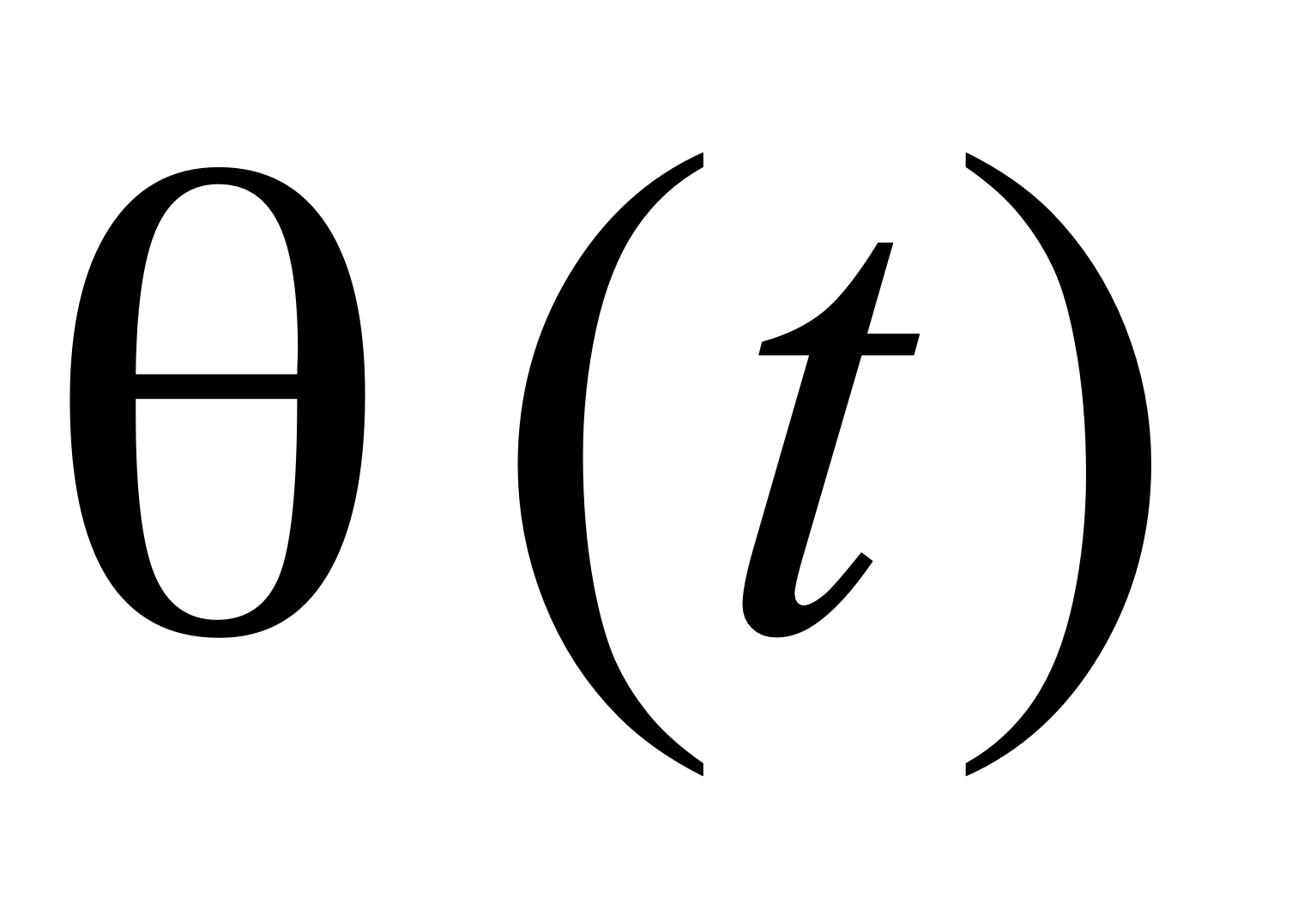
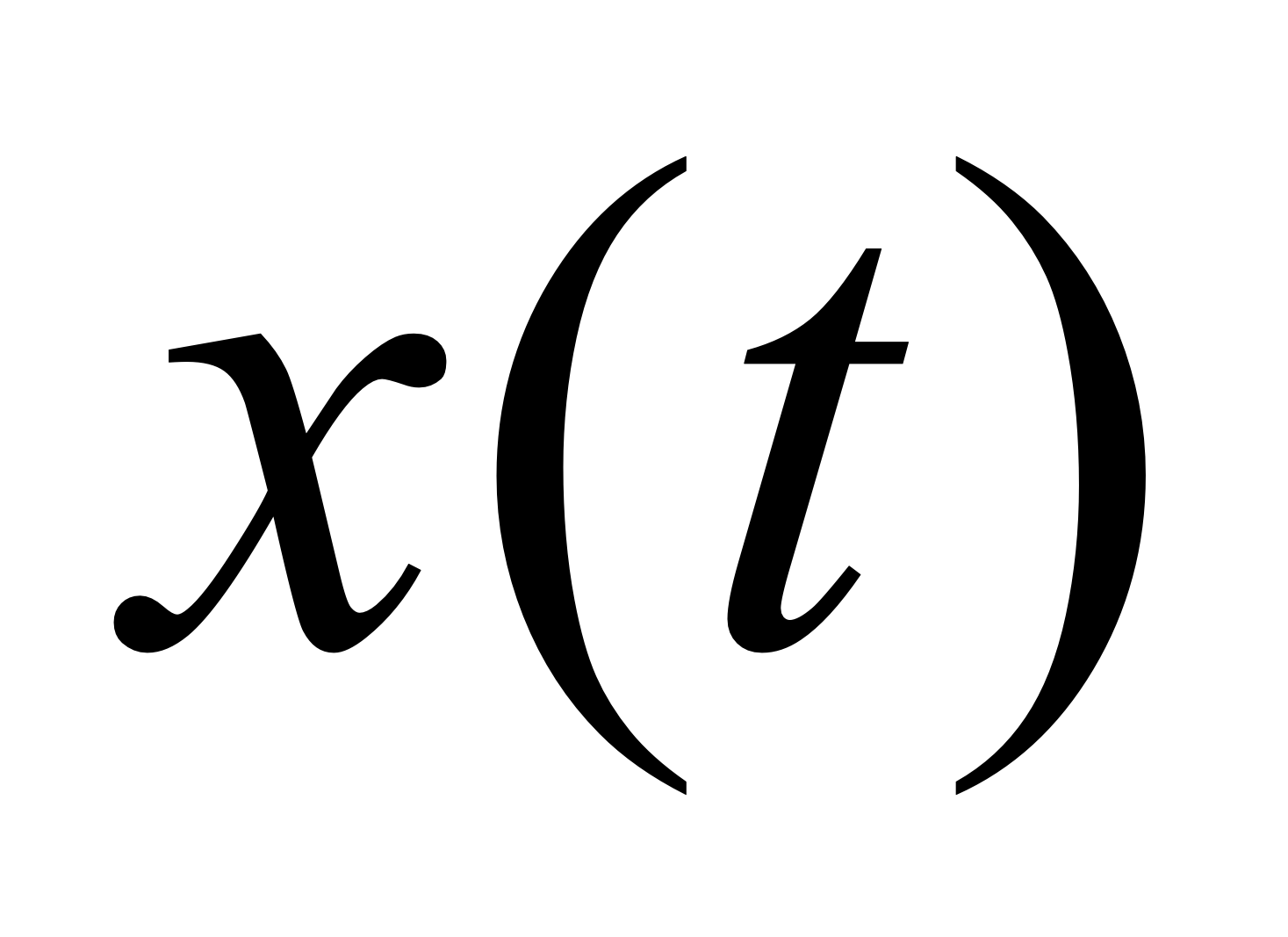
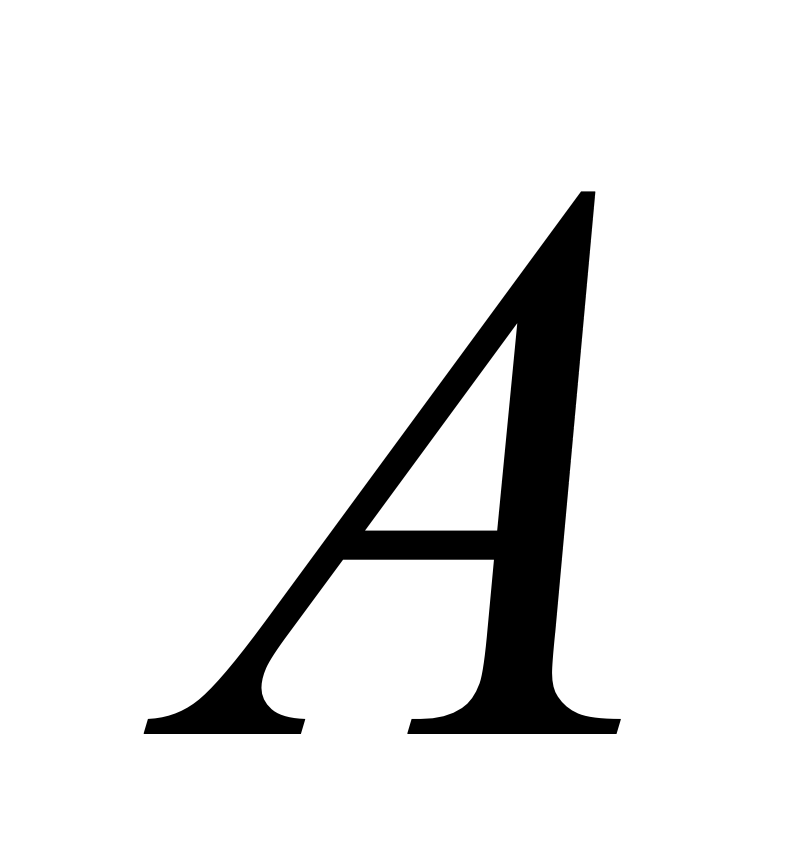
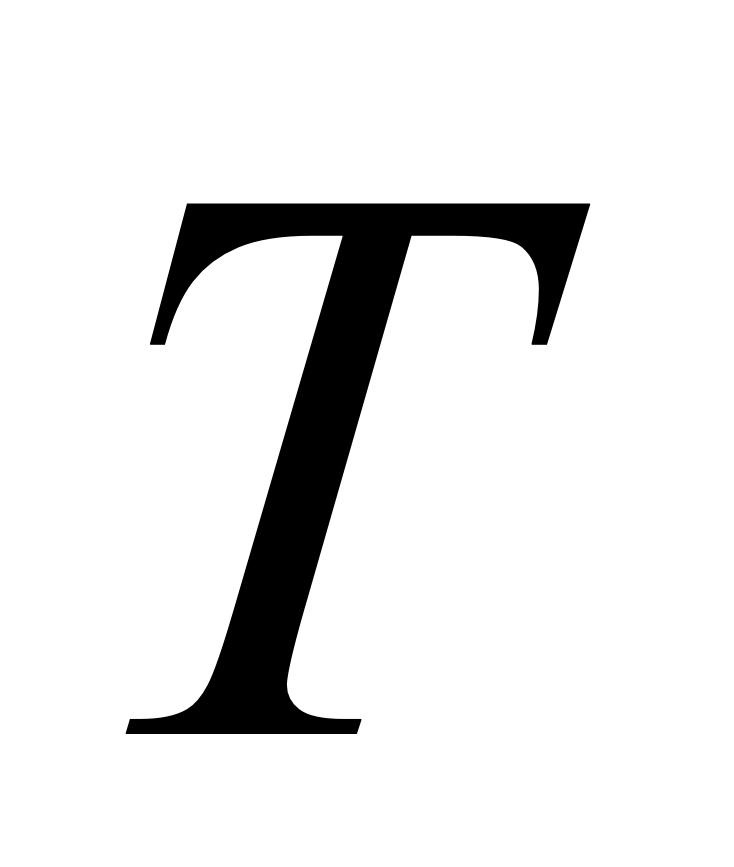
Для непрерывных случайных сигналов определения вероятности (1), (2) необходимо уточнить. Дело в том, что непрерывные величины принимают бесконечное (несчетное) множество значений и время  равно нулю, следовательно,  равно нулю. Поэтому мы должны рассматривать некоторый интервал, содержащий значения случайного величины, например. Тогда мы имеем аналогию с дискретным, случаем и сможем сформулировать определение функции распределения вероятности (аналитическое выражение закона распределения вероятности) для непрерывной случайной величины :

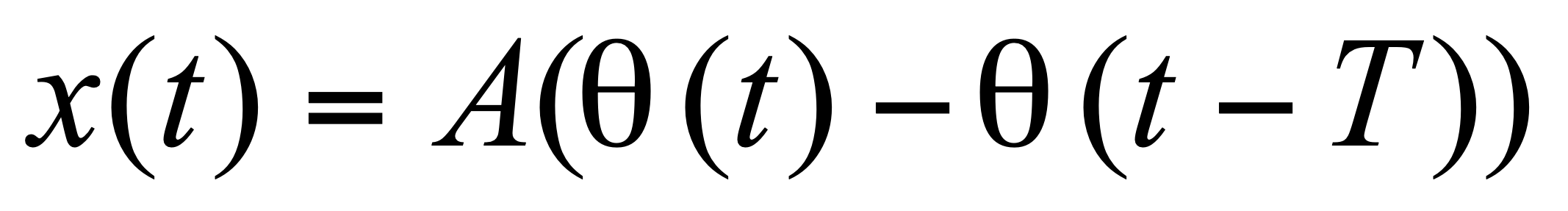
. (3)

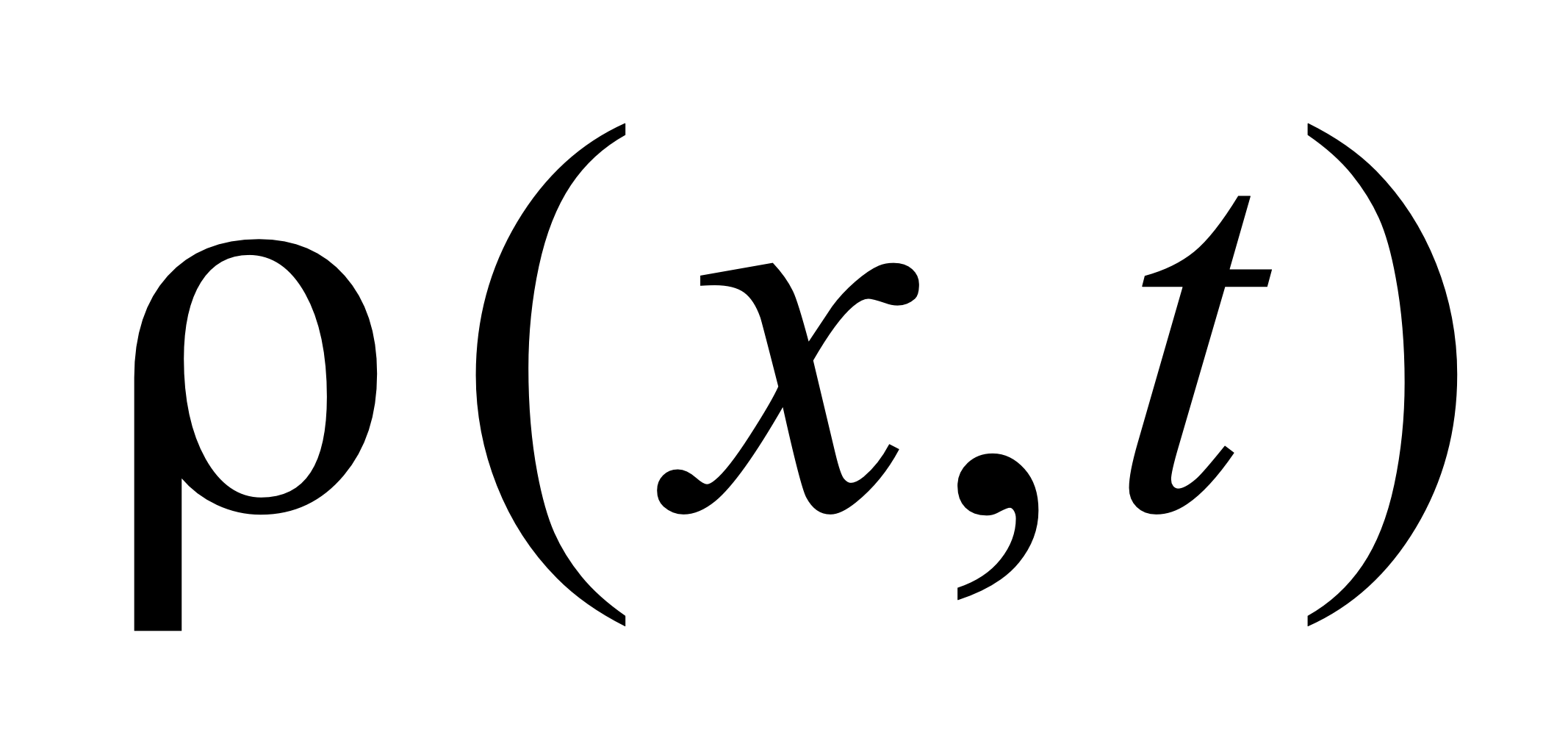
Скобки < …. > означают среднее значение по ансамблю, - функция Хэвисайда (функция единичного сигнала, функция включения) от аргумента .

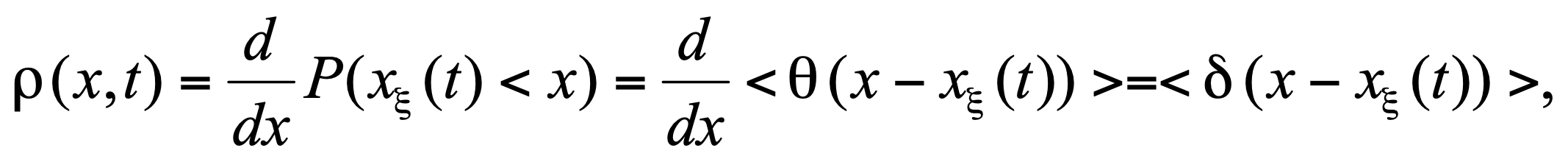
По определению

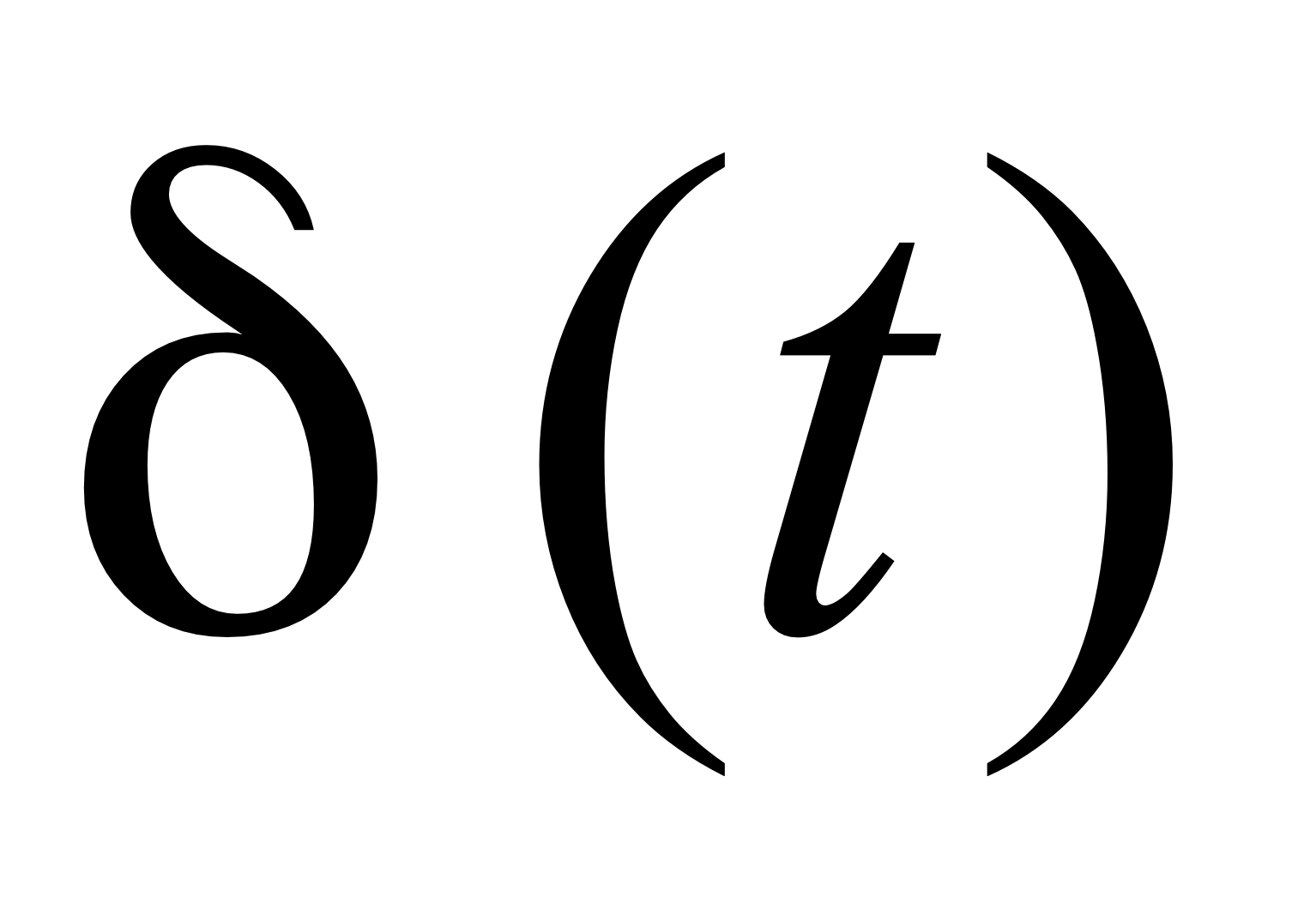
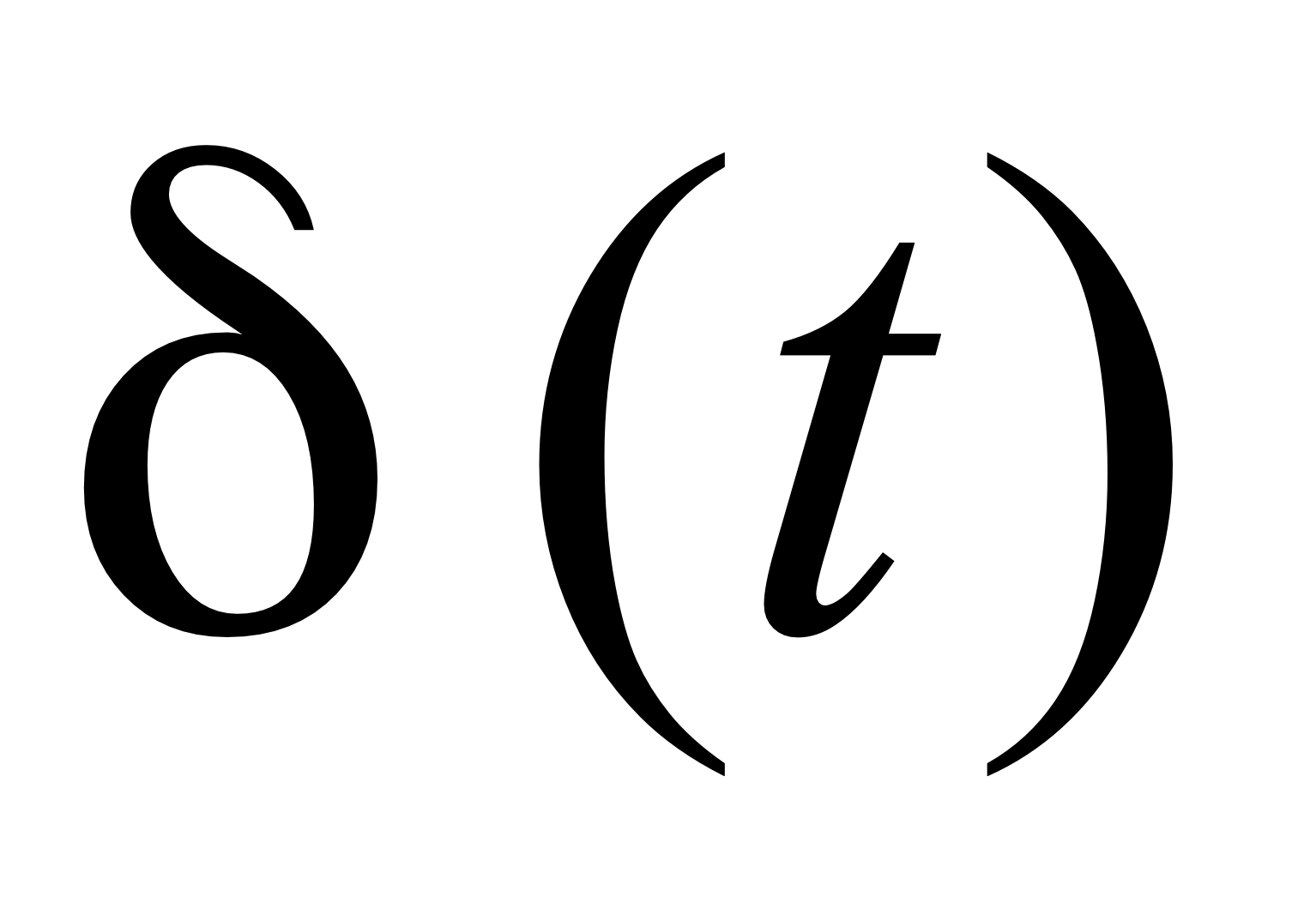
 . (4)

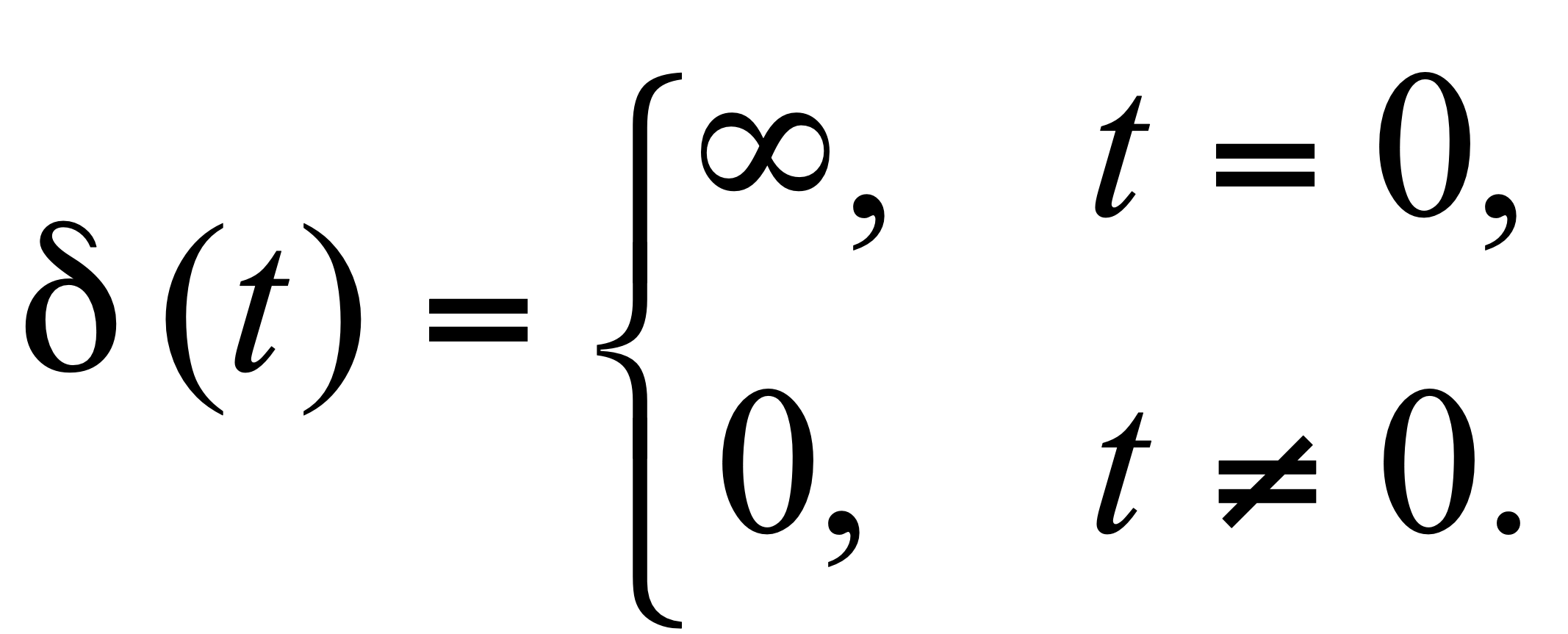
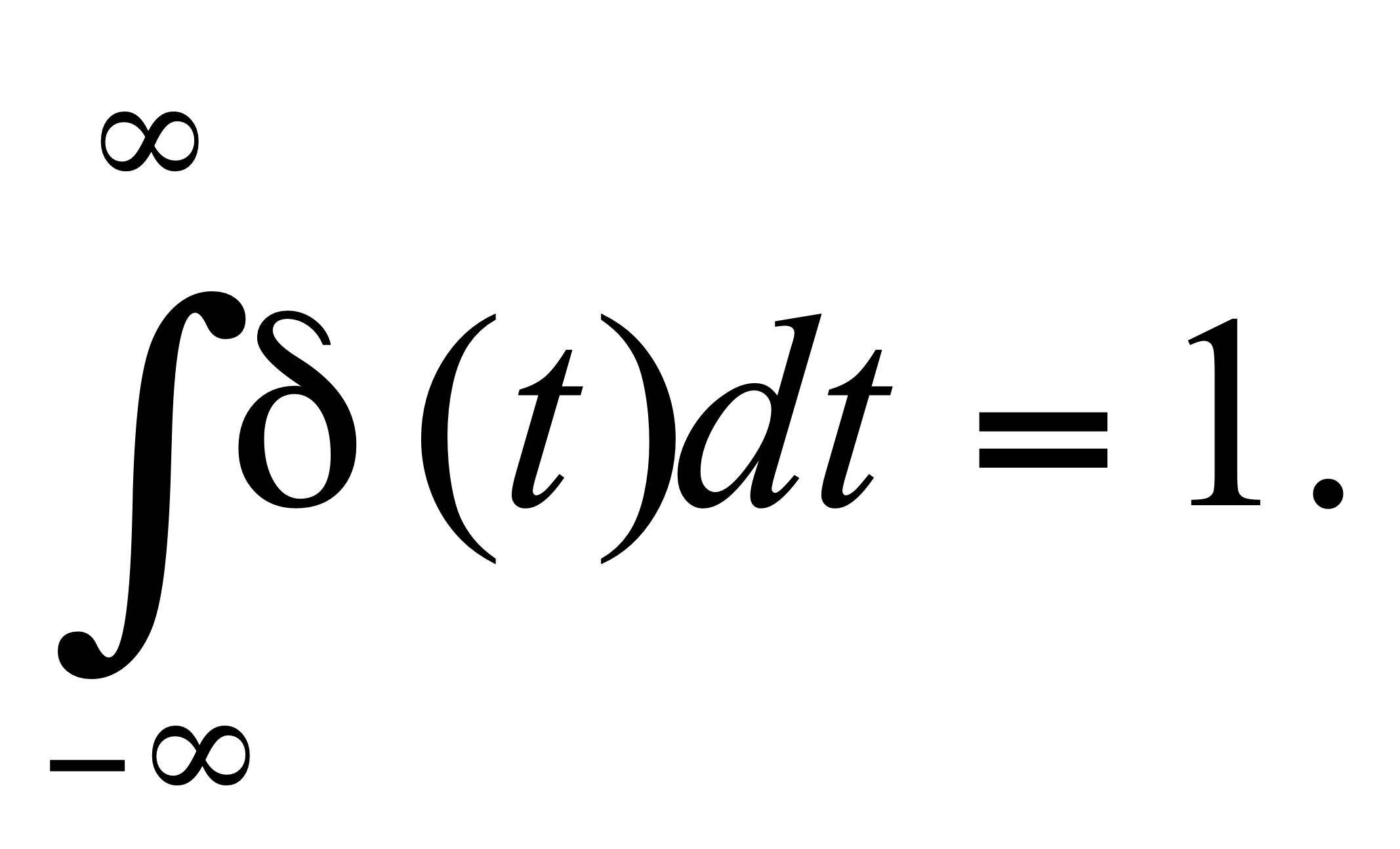
Функцию удобно использовать в виде математического выражения прямоугольного импульса  с амплитудой и длительностью :

 (5)

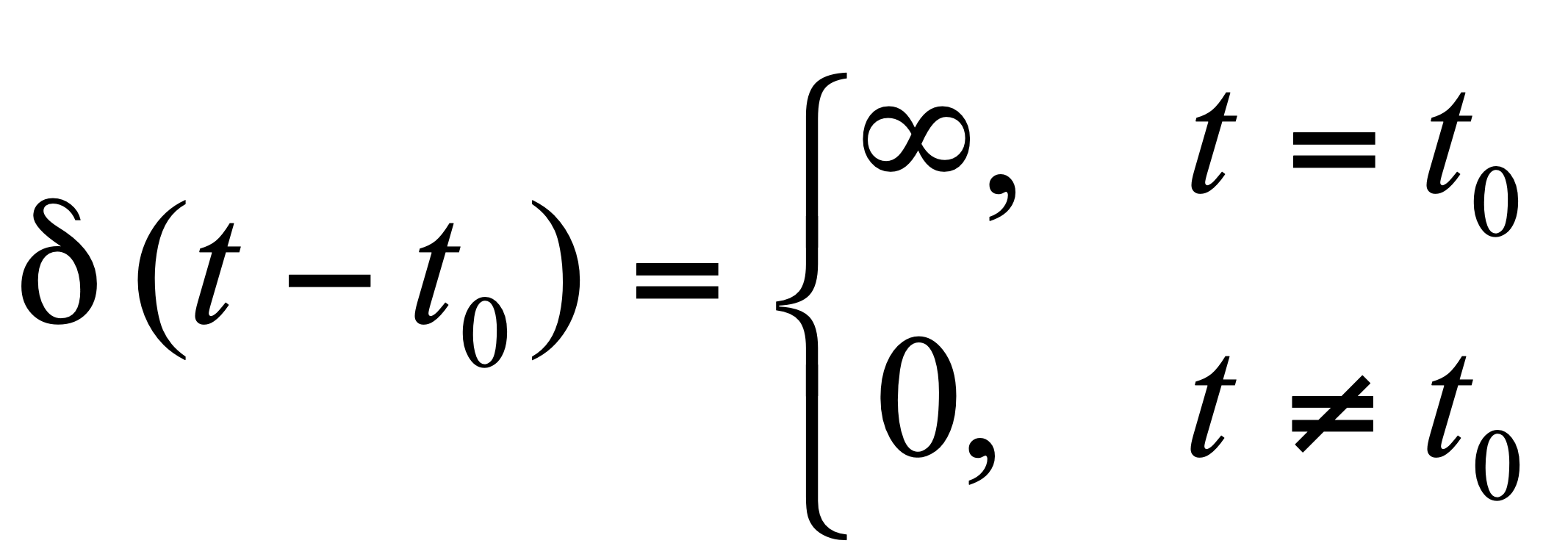
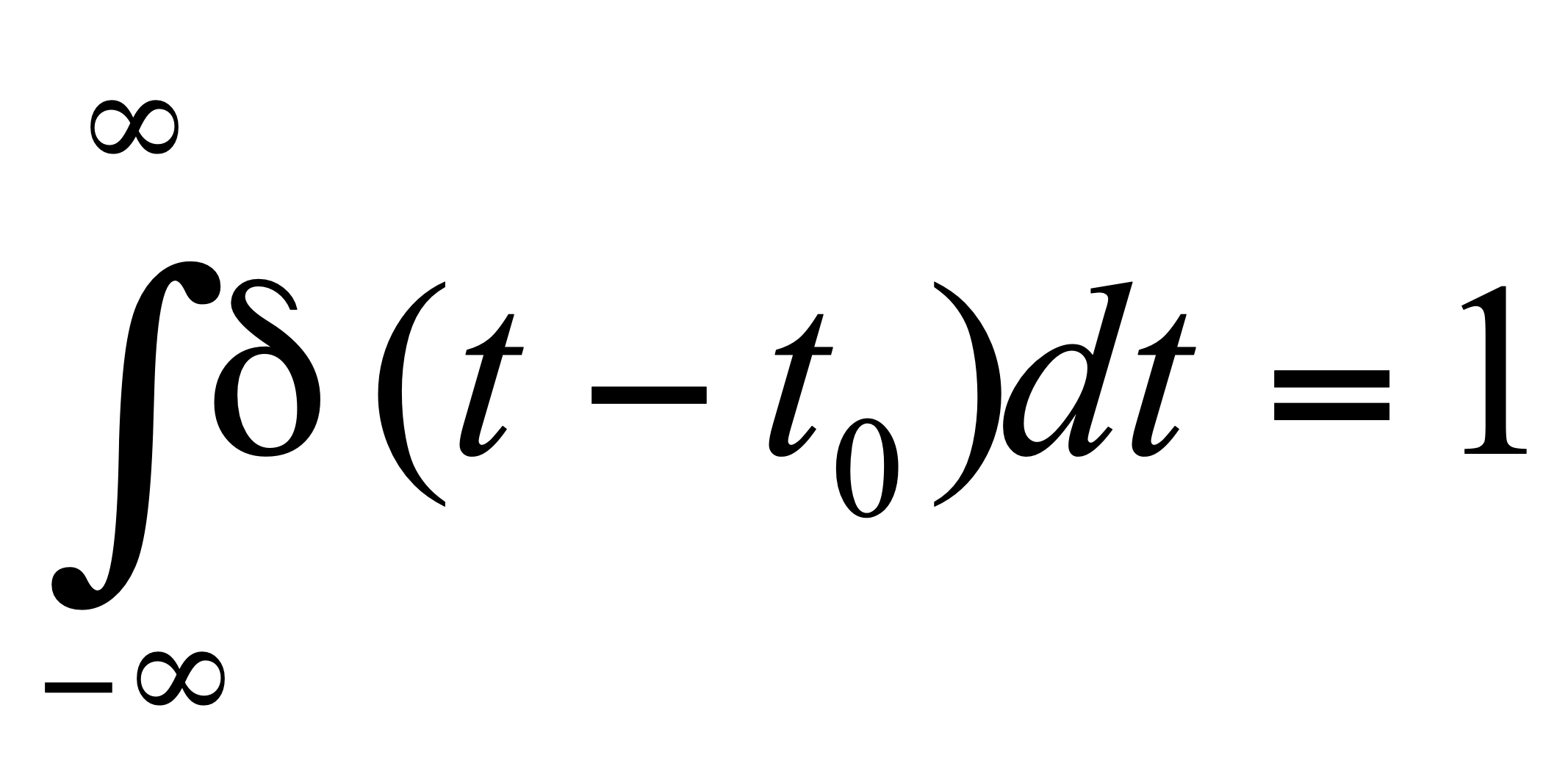
Плотность вероятности  определим как производную выражения (3):

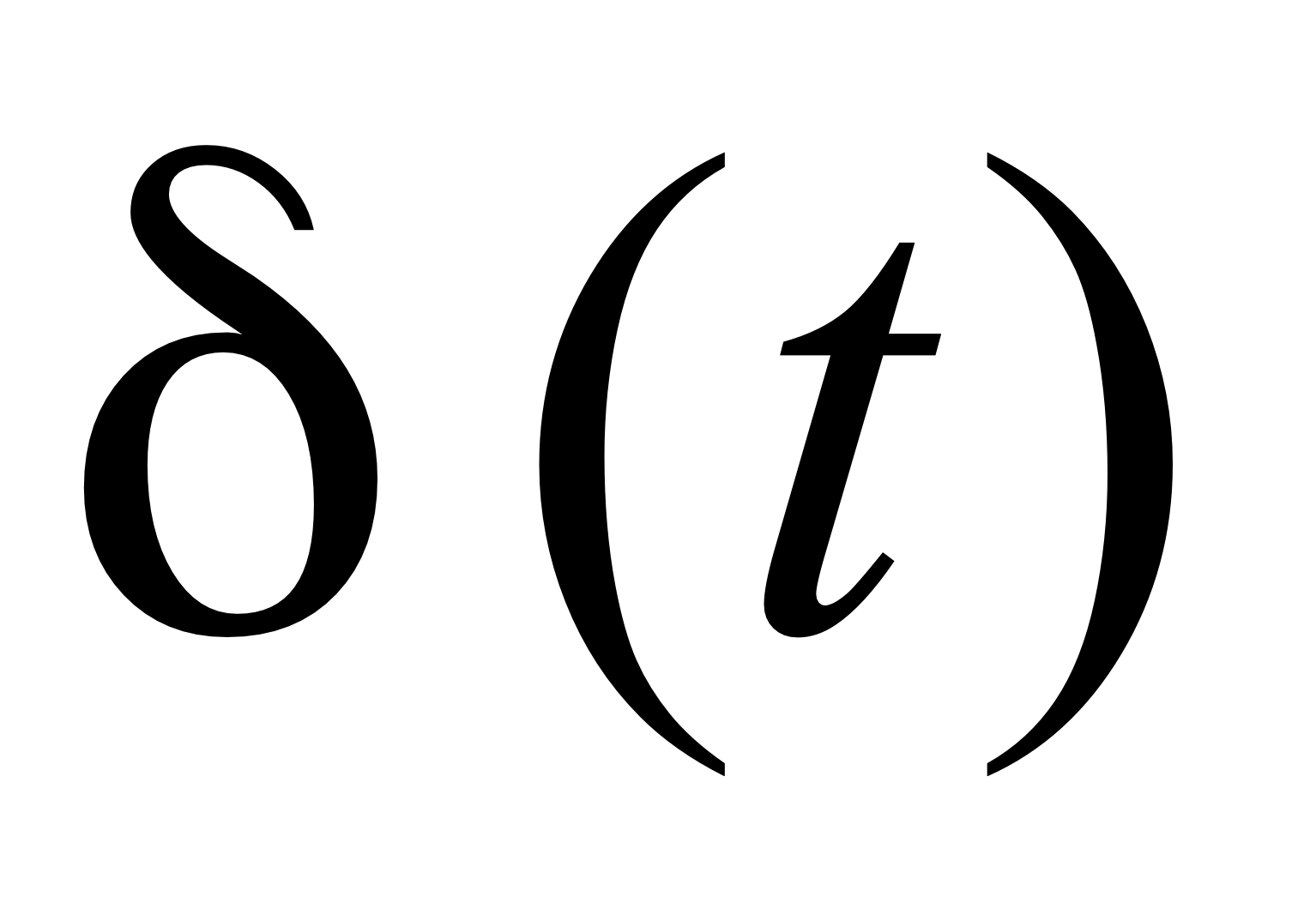
 (6)

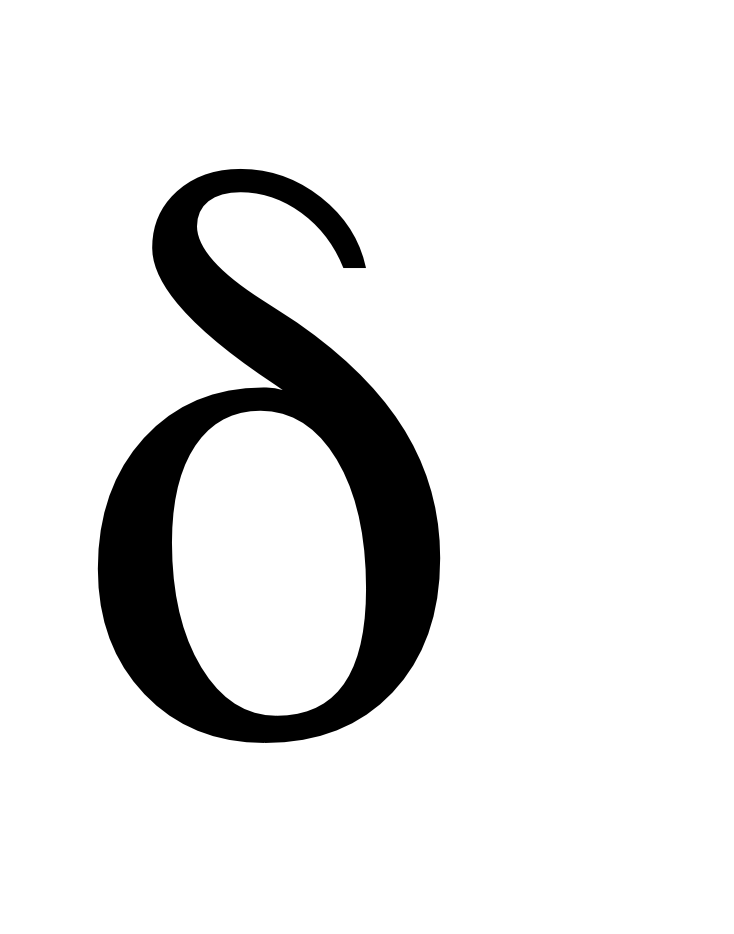
где  - *дельта-функция*, или, функция Дирака , которая определяется соотношениями

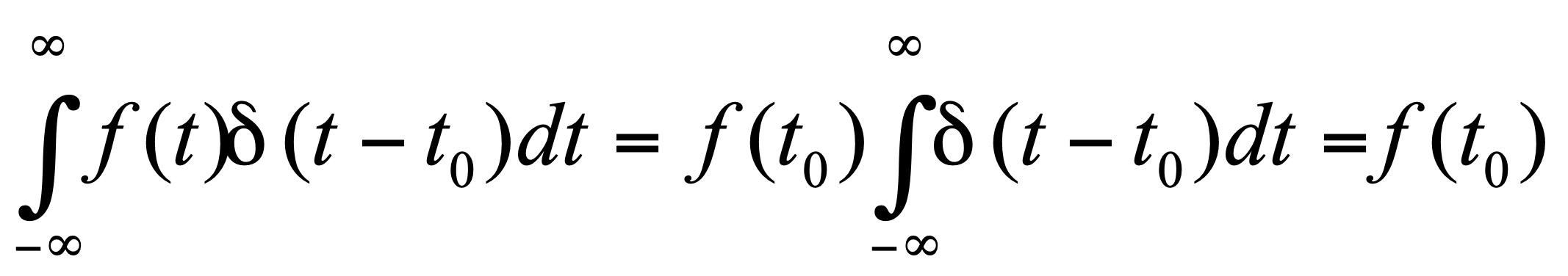
1.  2. 

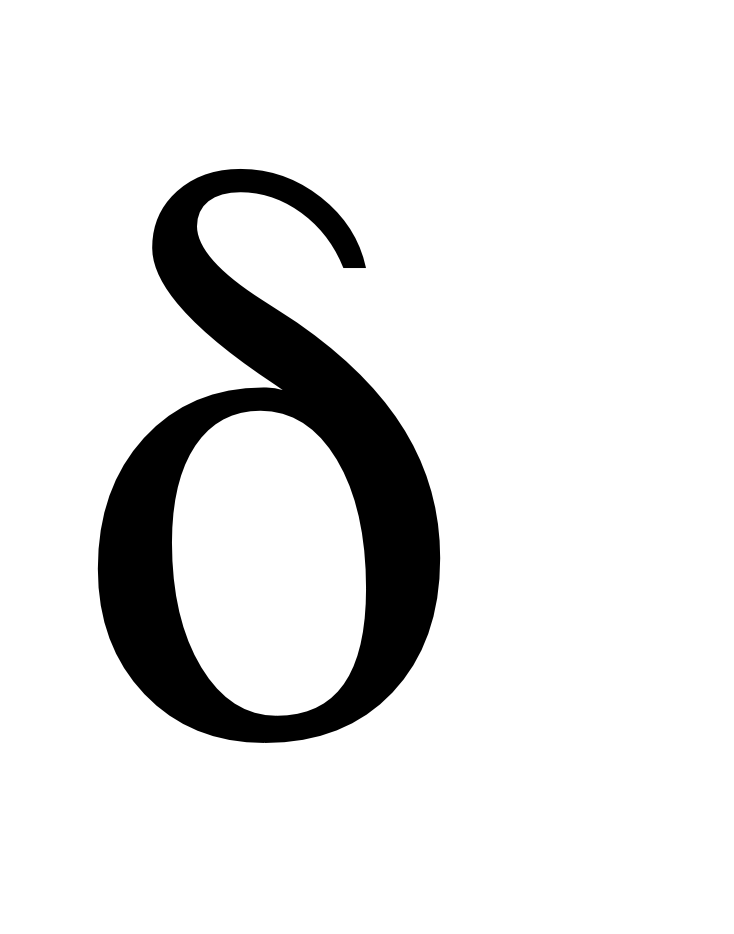
(7)

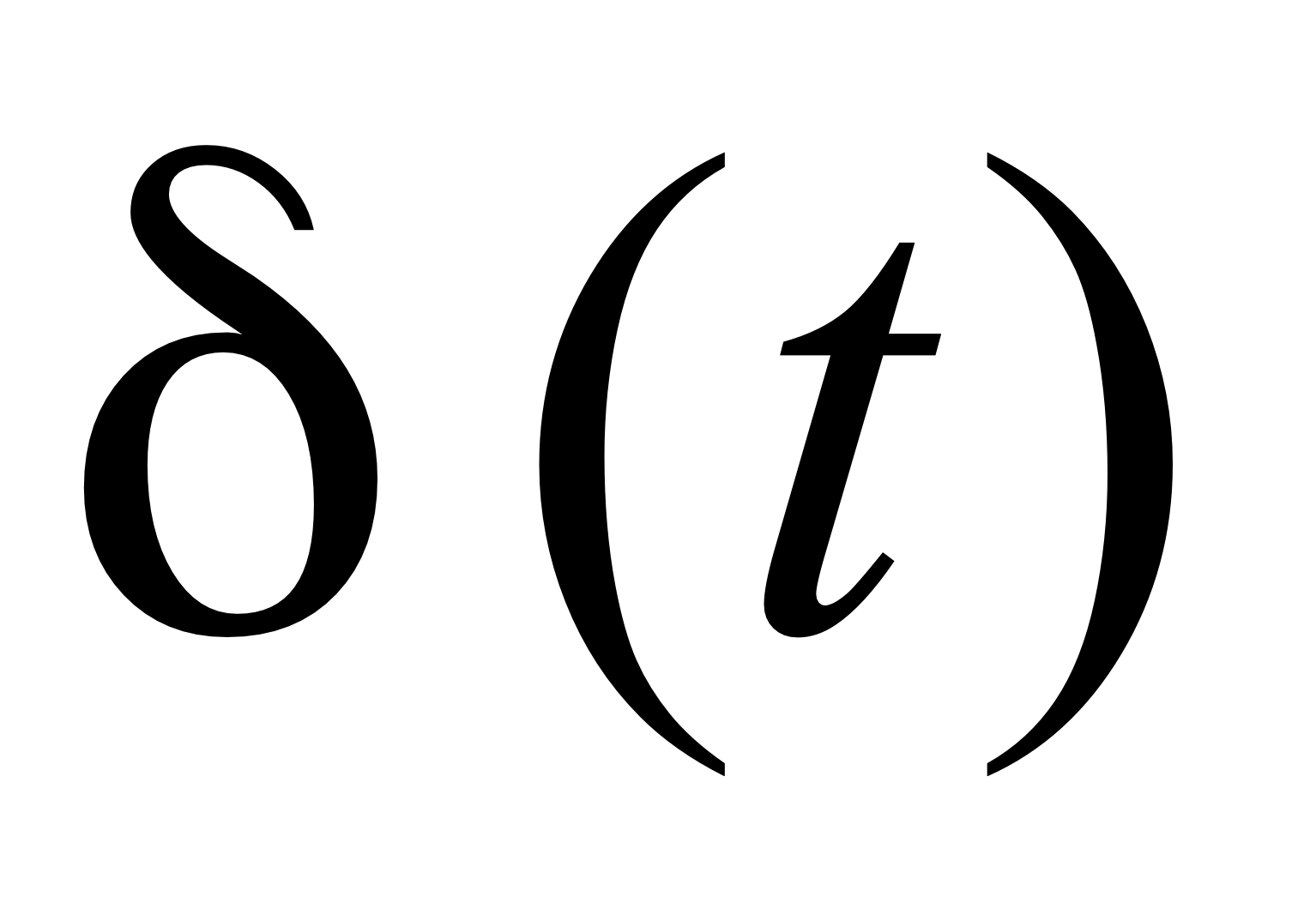
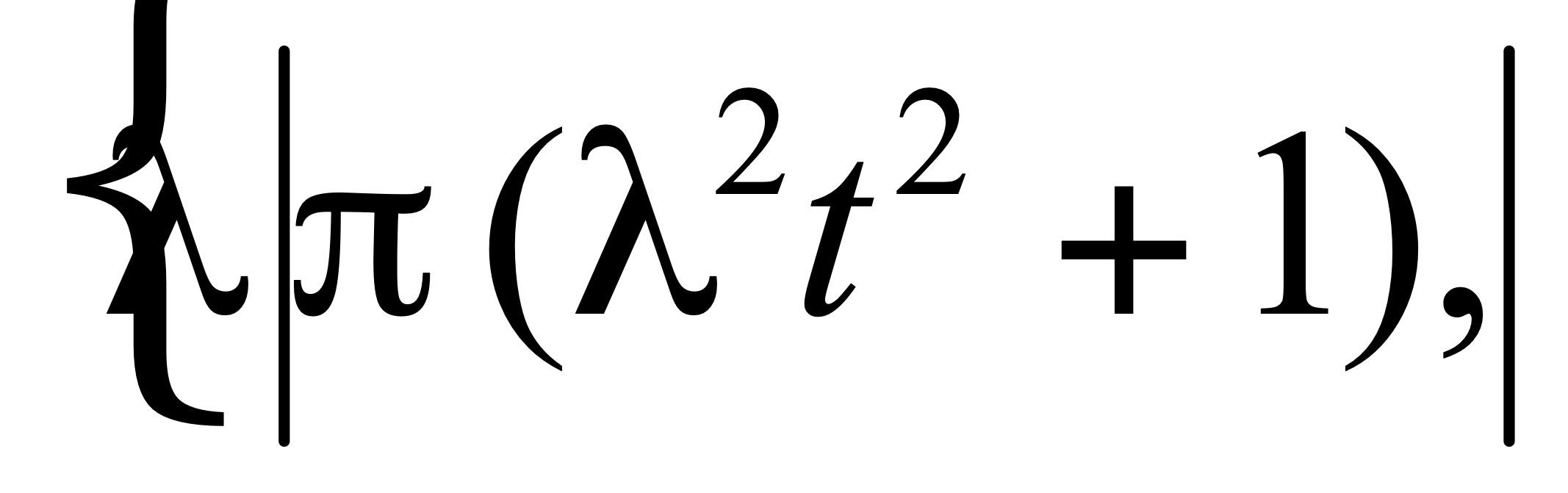
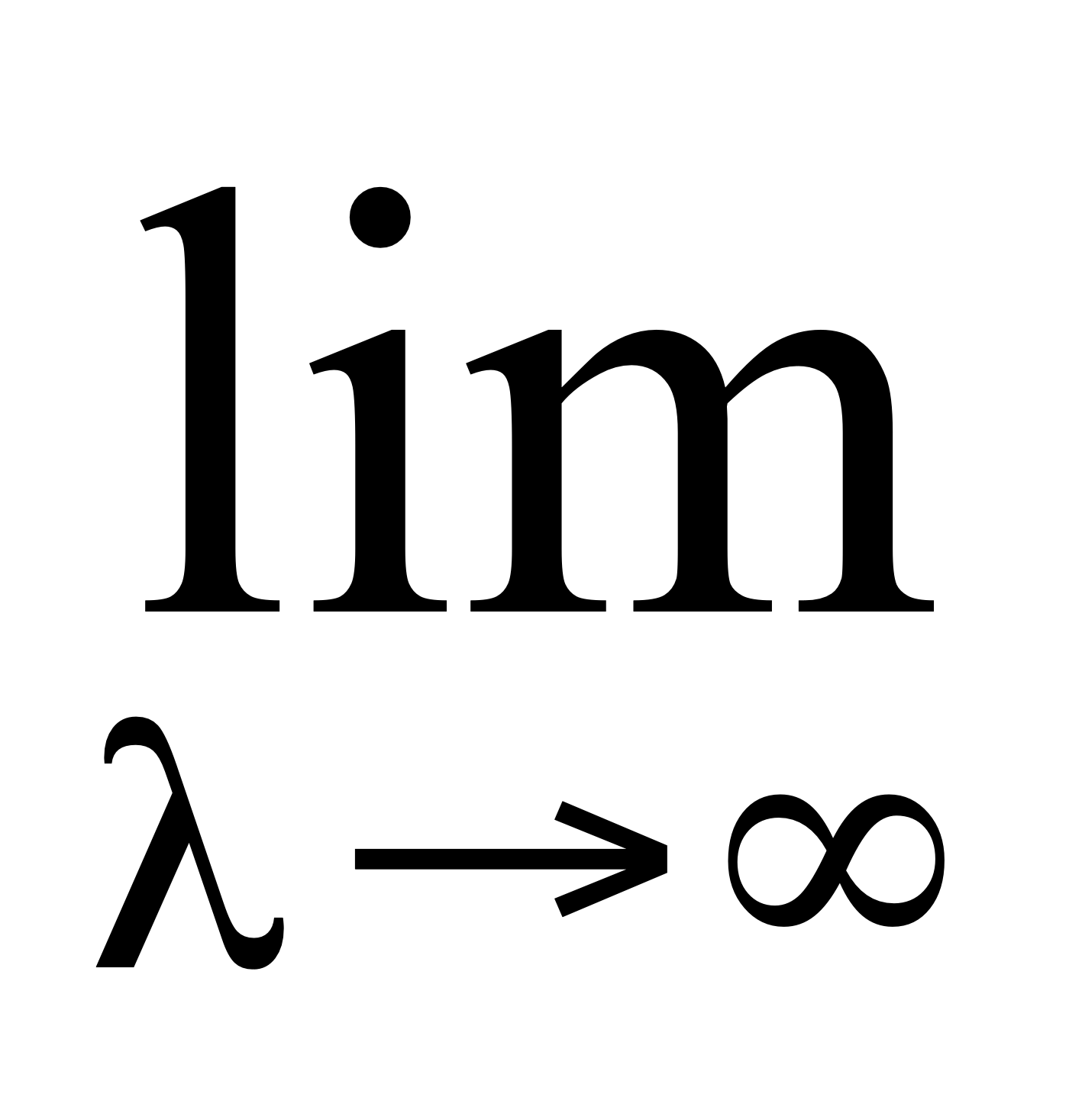
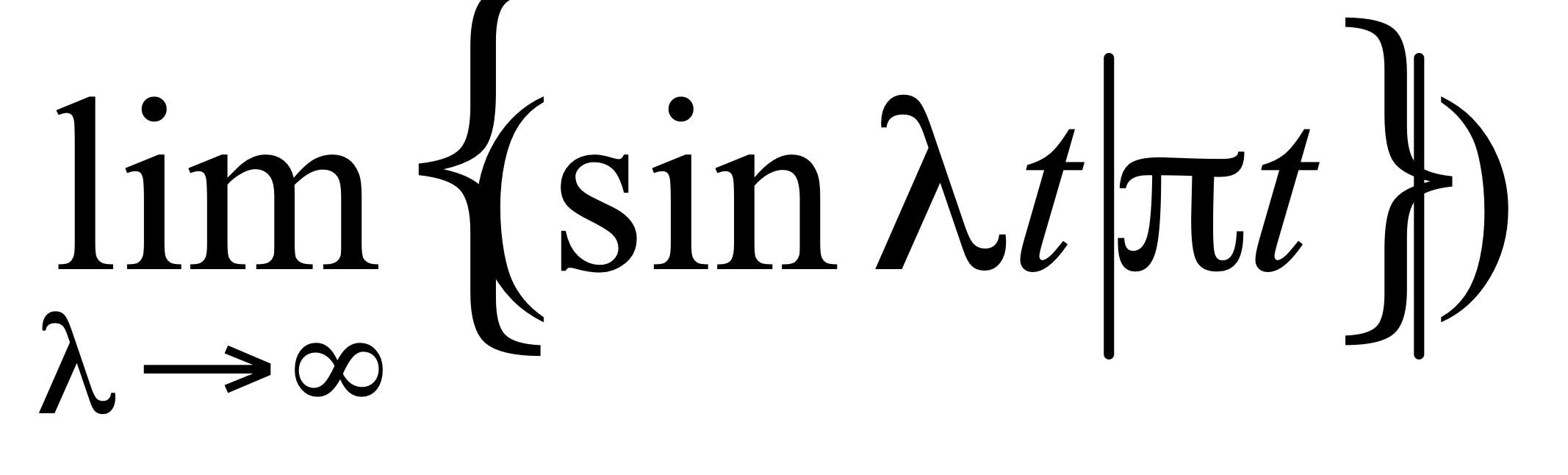
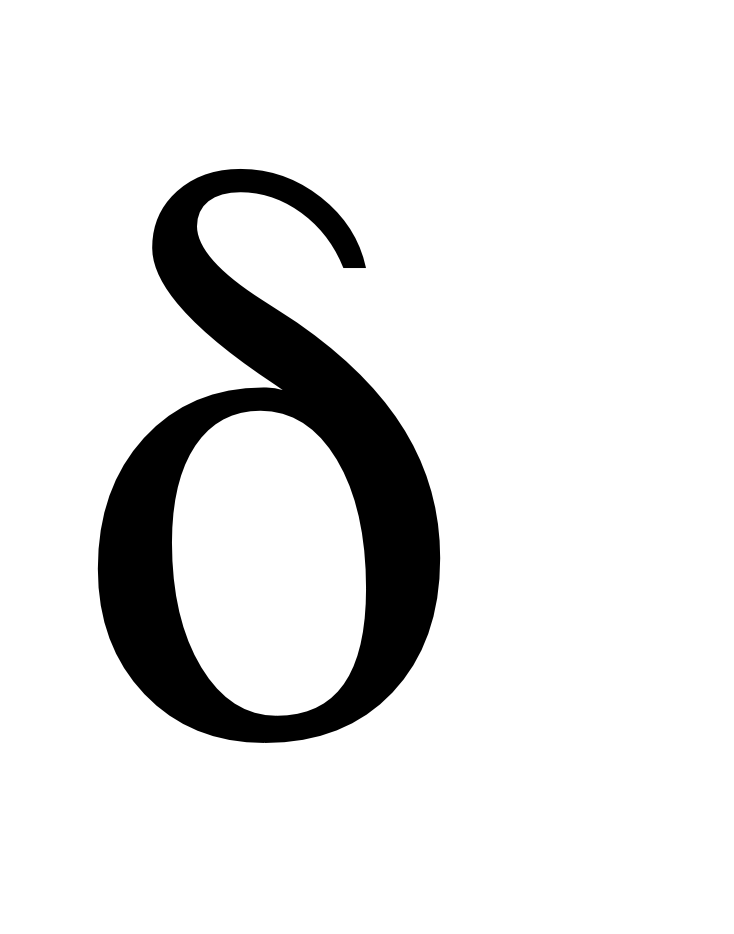
 

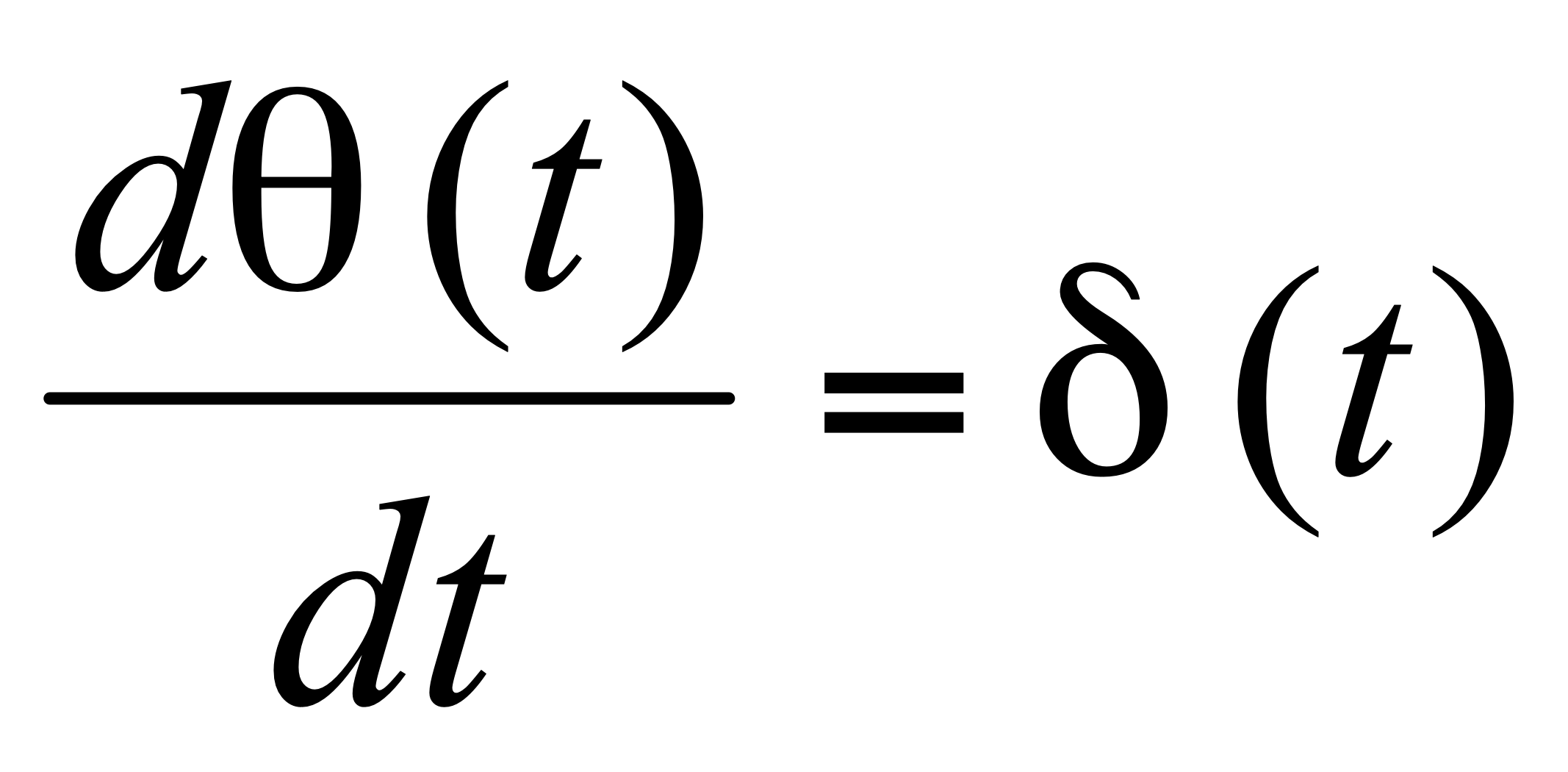
Из второй части определения следует, что размерность  обратна размерности аргумента t .

- функция имеет важное свойство – фильтрирущее свойство:

, (8)

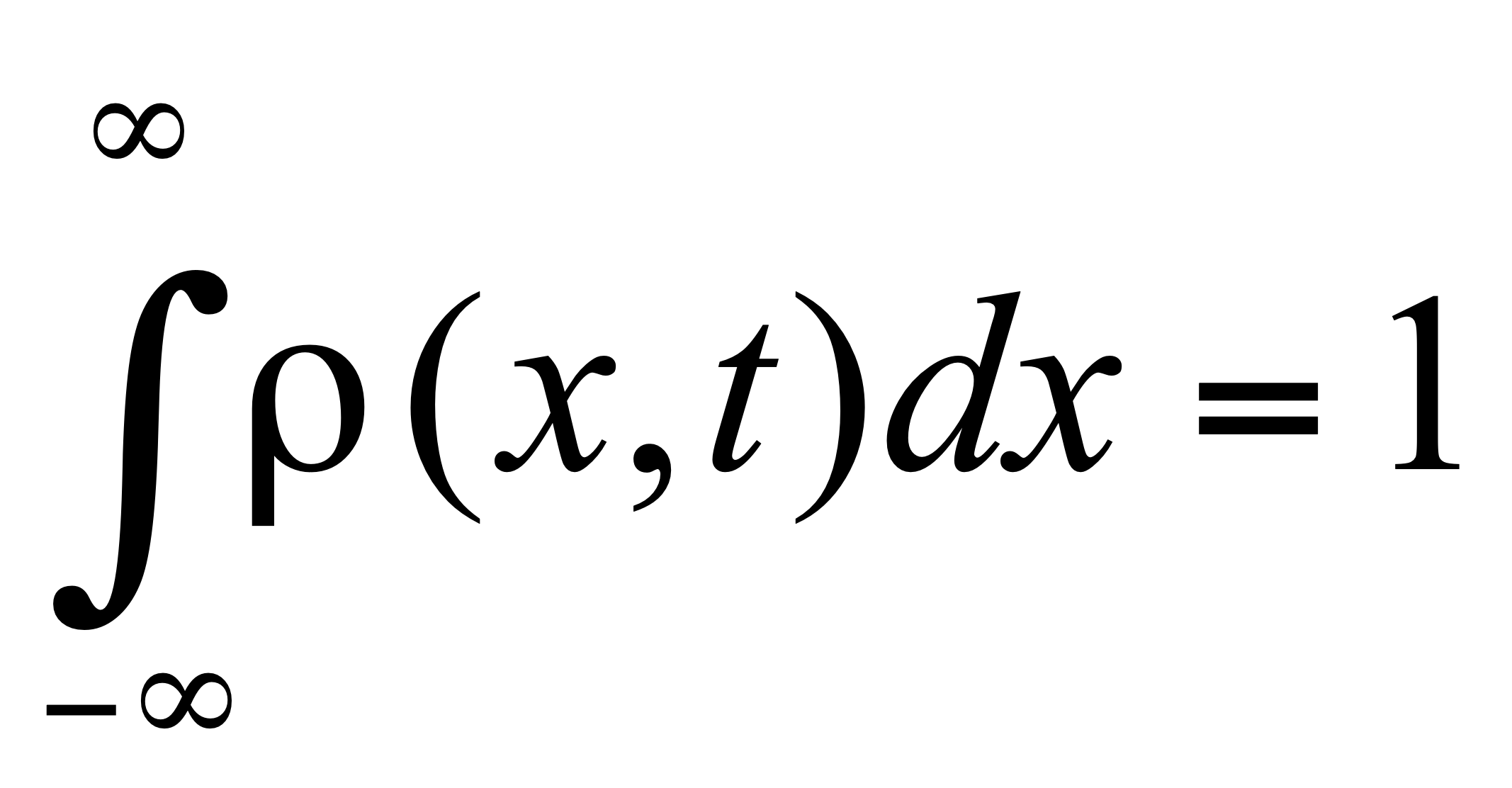
т.е. любой определенный интеграл, содержащий - функцию, легко вычисляется.

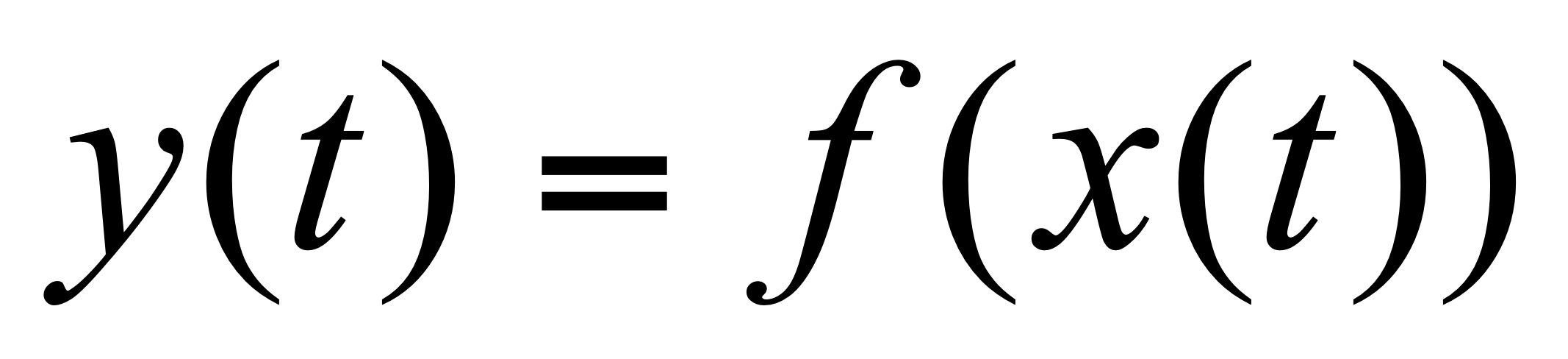
Функция Дирака  относится к так называемым *обобщенным*, *символическим* функциям. Свойствами (7) обладают многие функции. Например, выражения   тоже обладают свойствами (7). Поэтому не существующую в классическом смысле производную функции Хэвисайда, но обладающую свойствами (7), можно определить через  функцию:

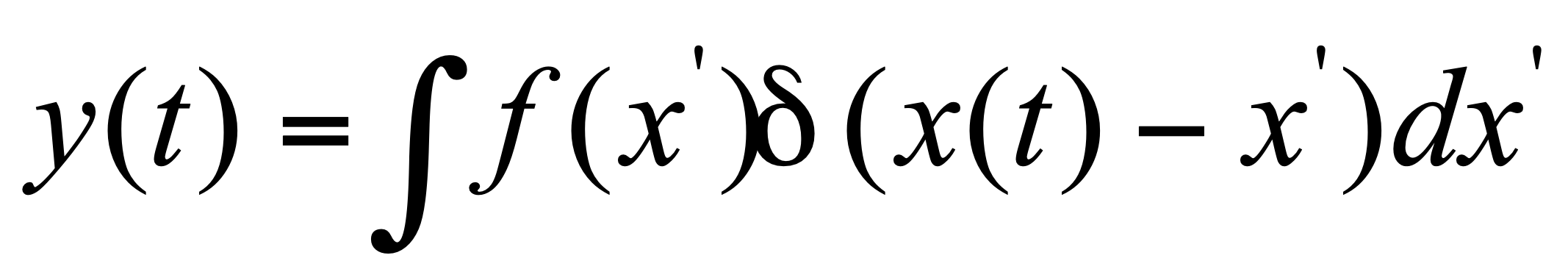
. (9)

3. Свойства плотности вероятности

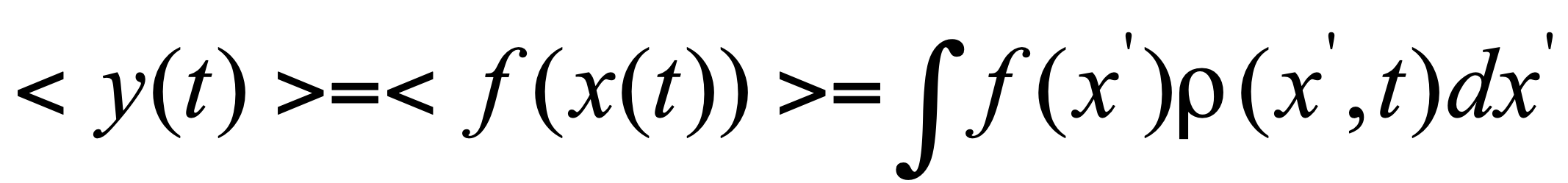
Условие нормировки задается как

 (10)

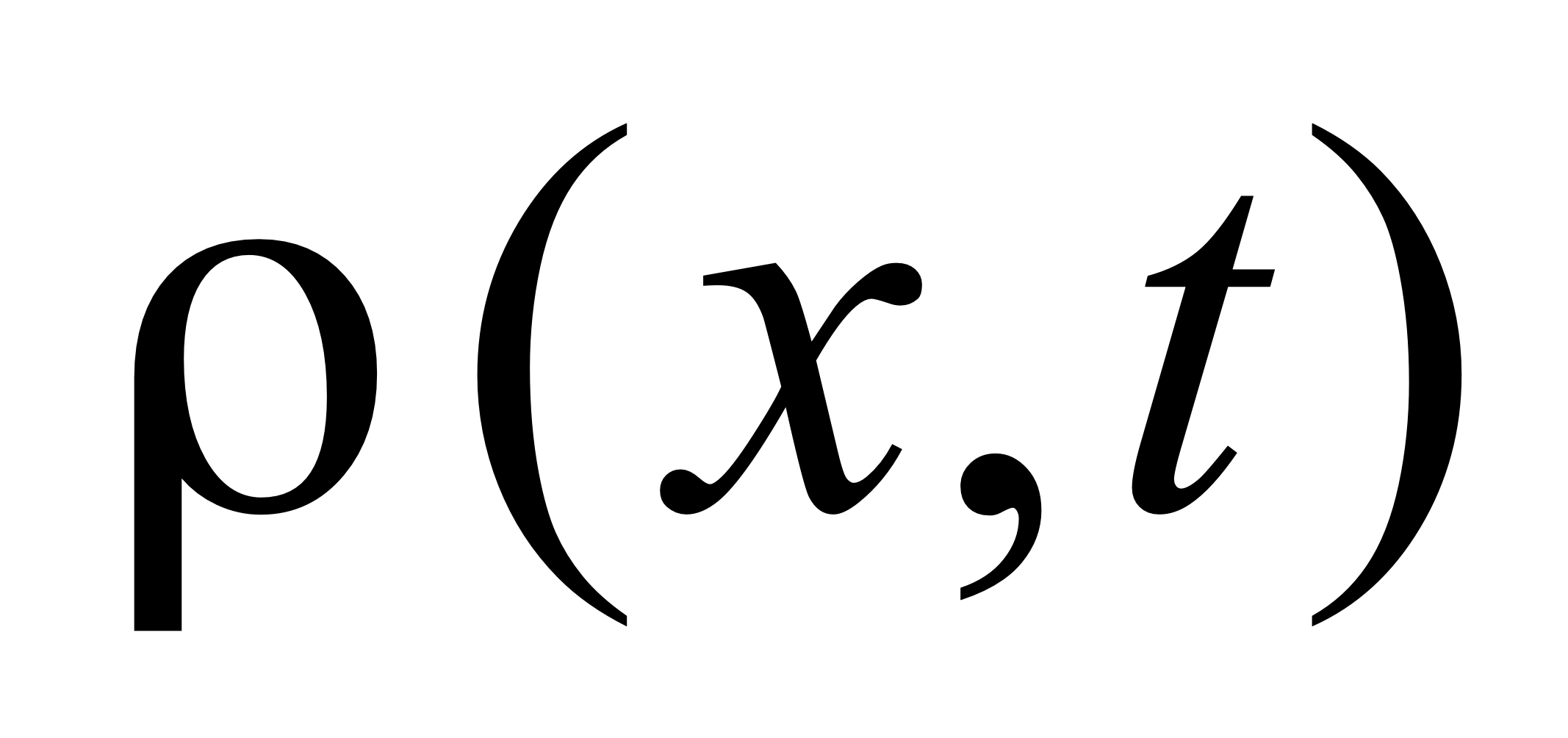
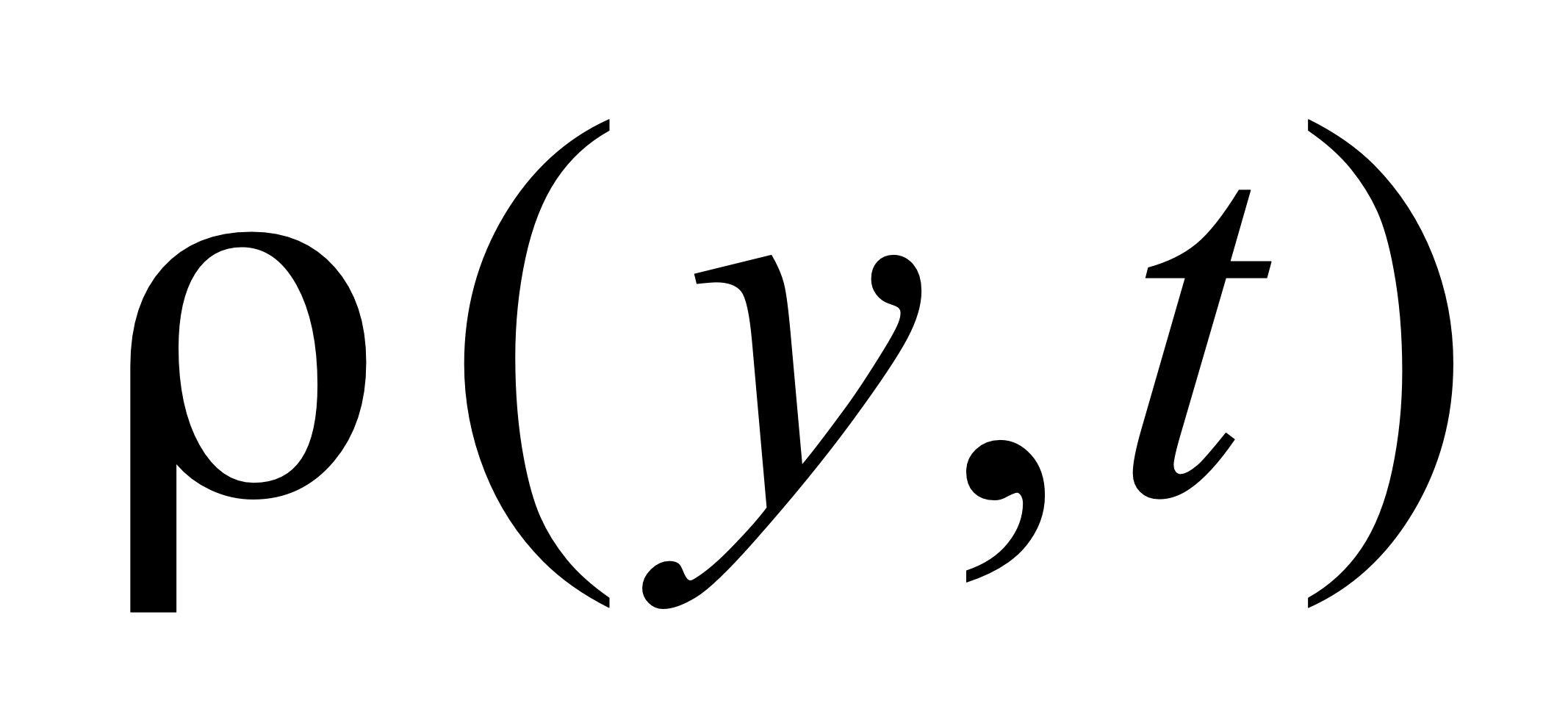
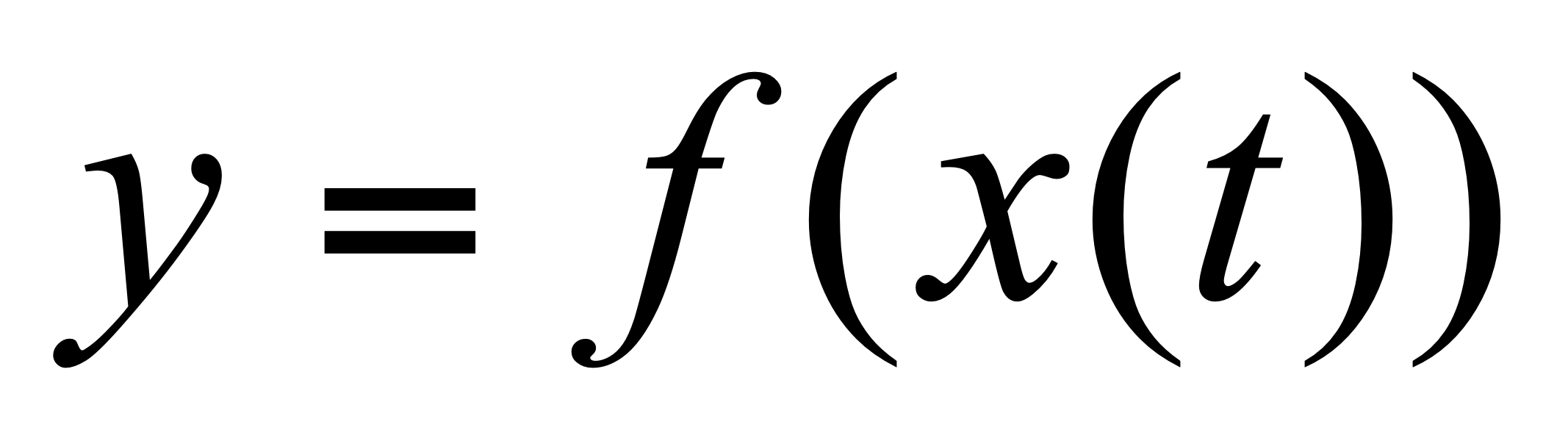
Если , то можно представить

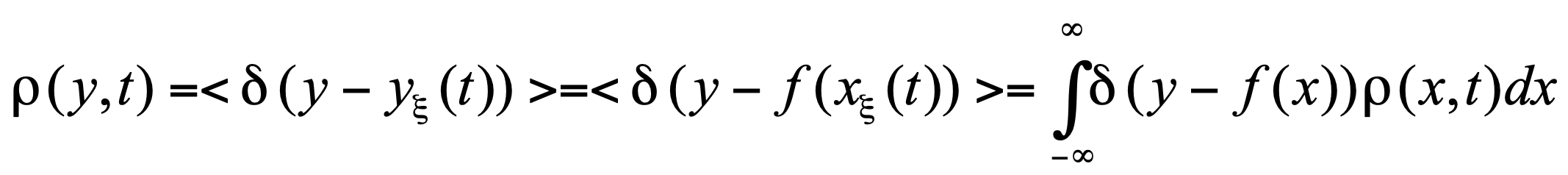
. (11)

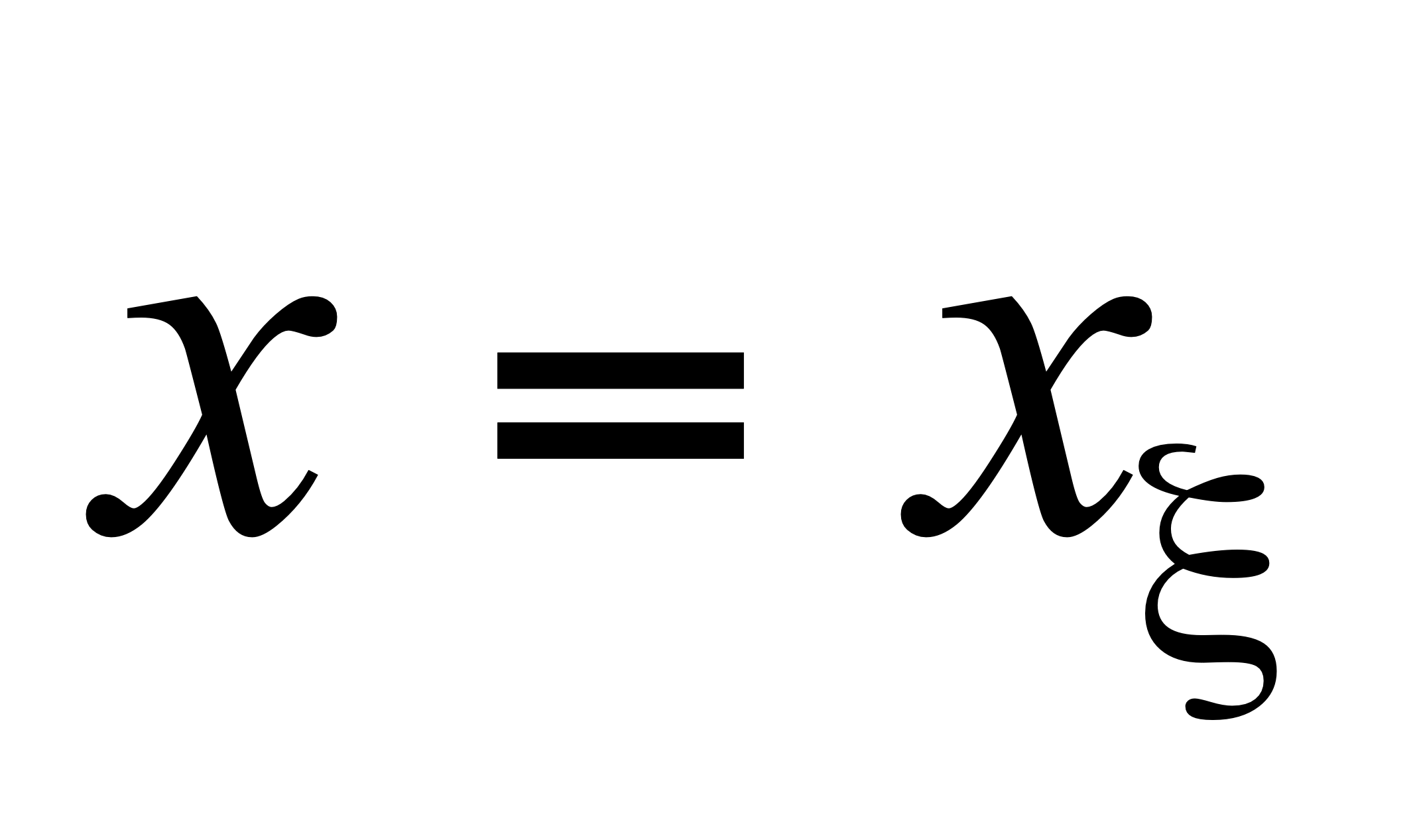
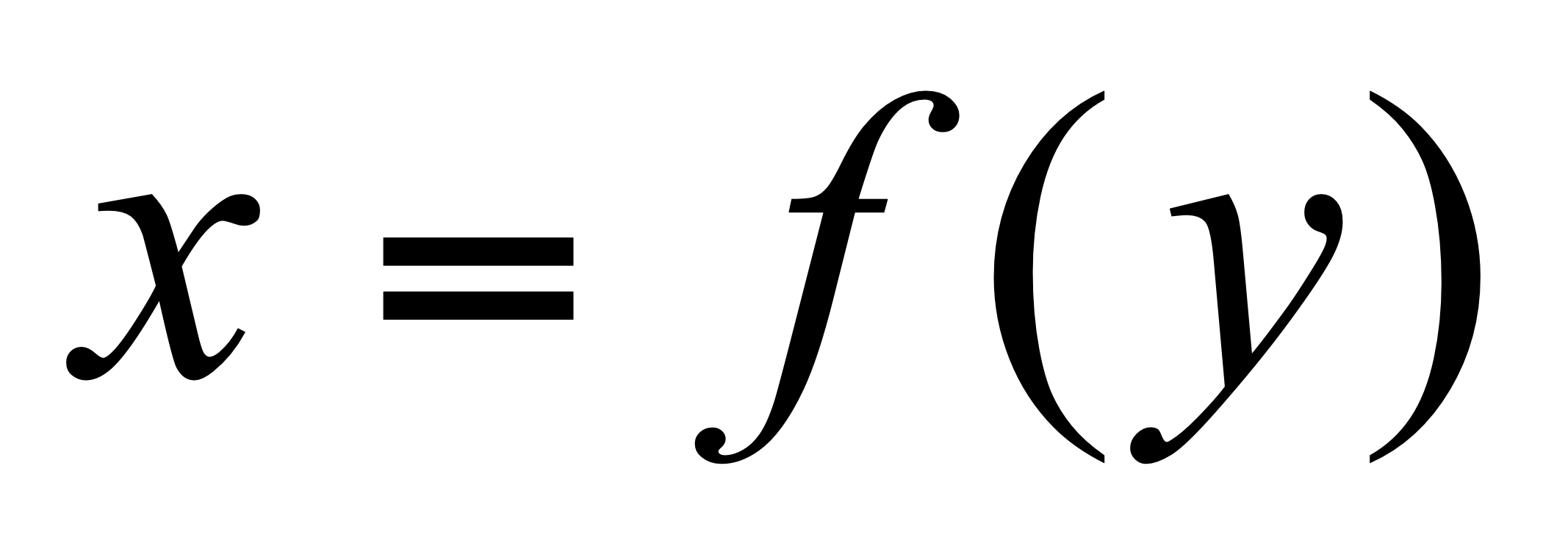
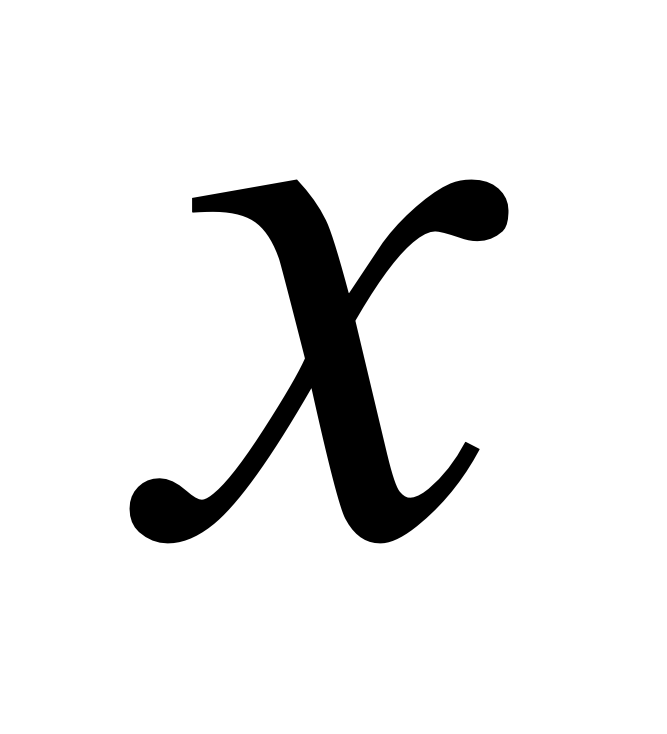
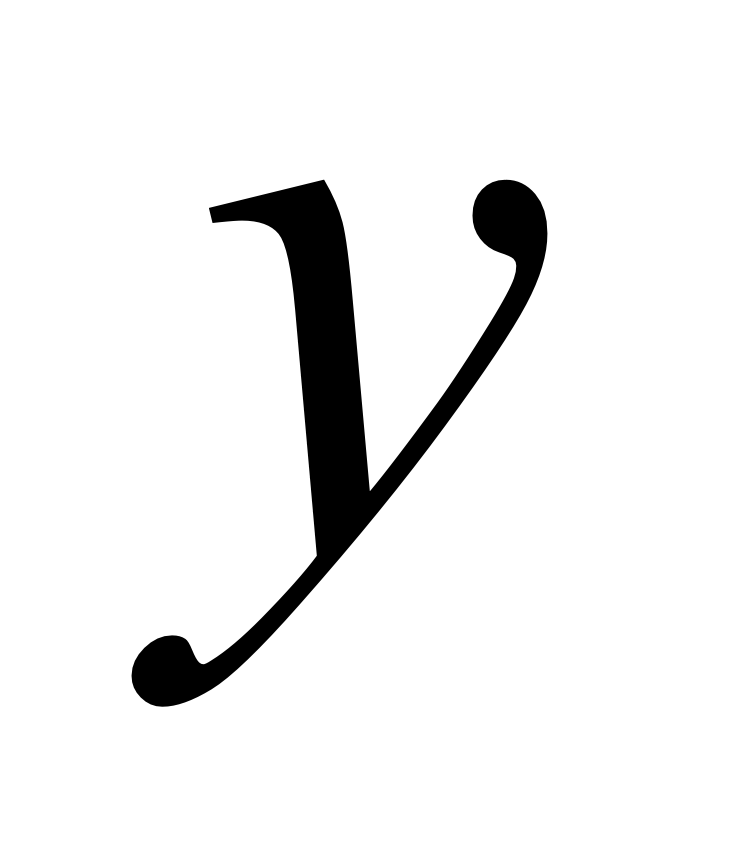
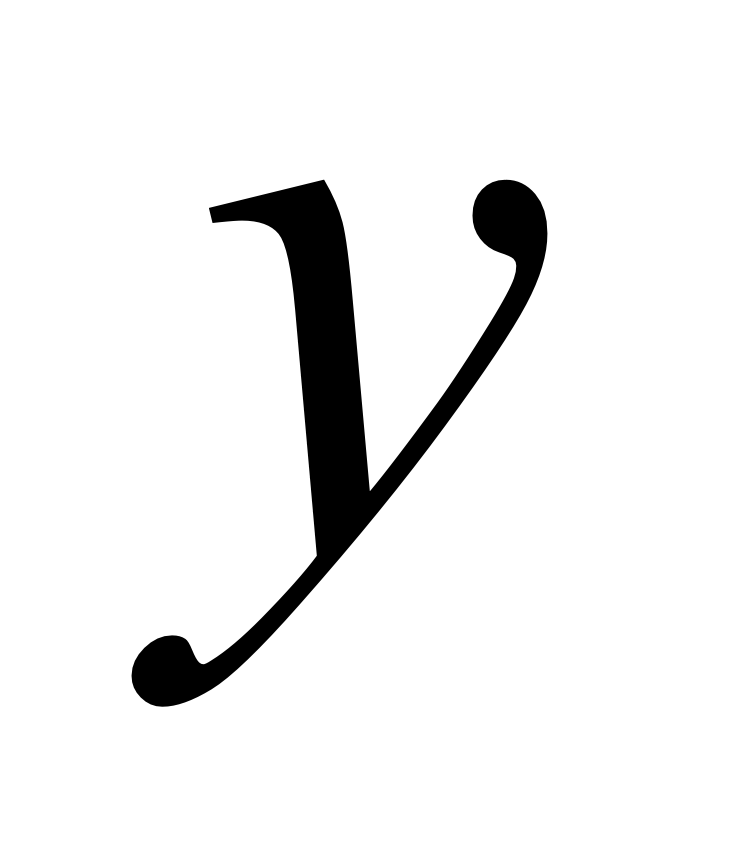
Усредняя (11) по ансамблю, получим

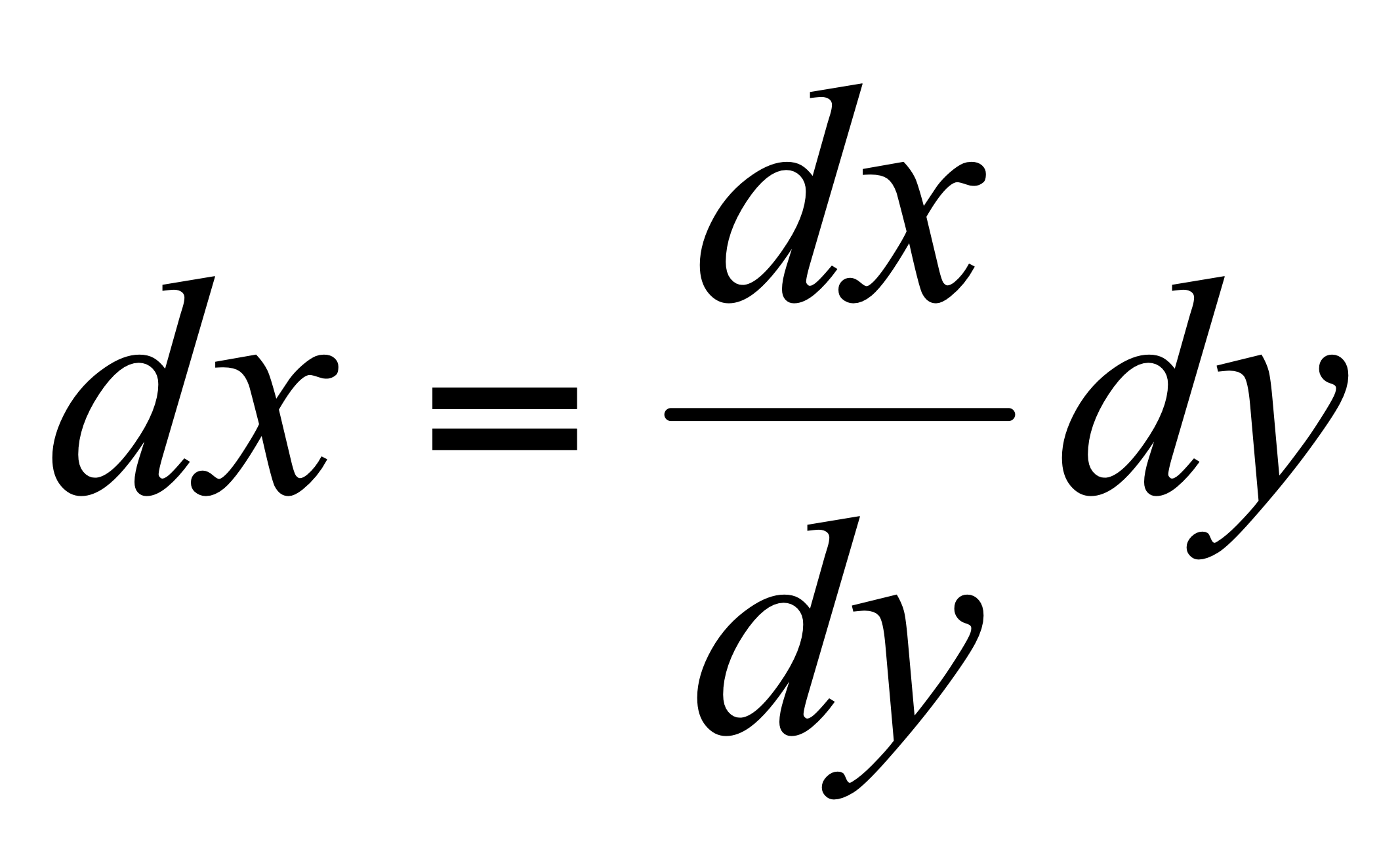
 (12)

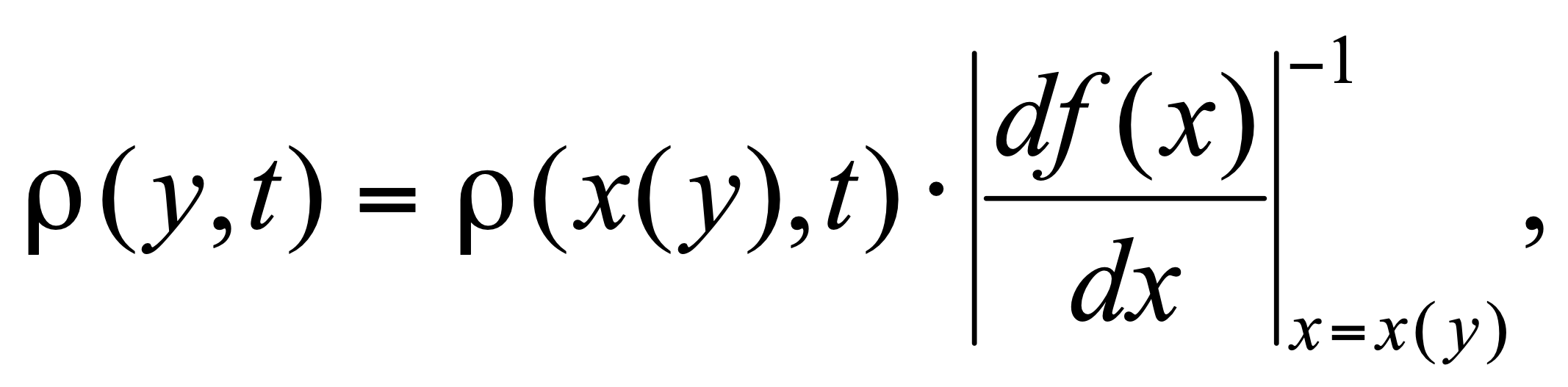
Формула (12) определяет среднее значение любой функции через плотность вероятности.

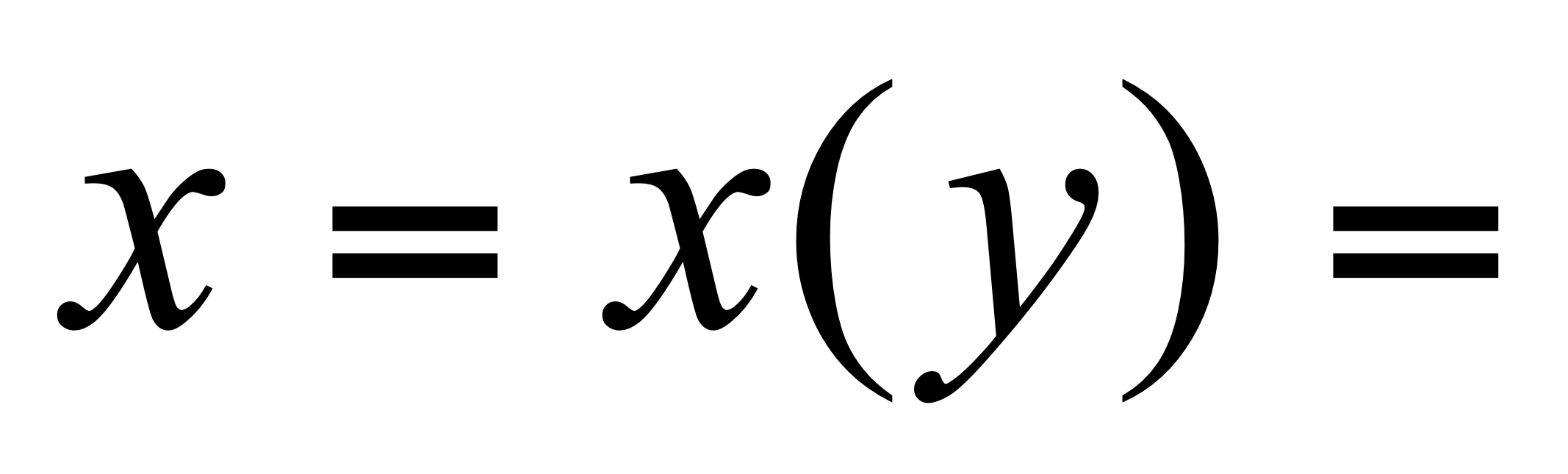
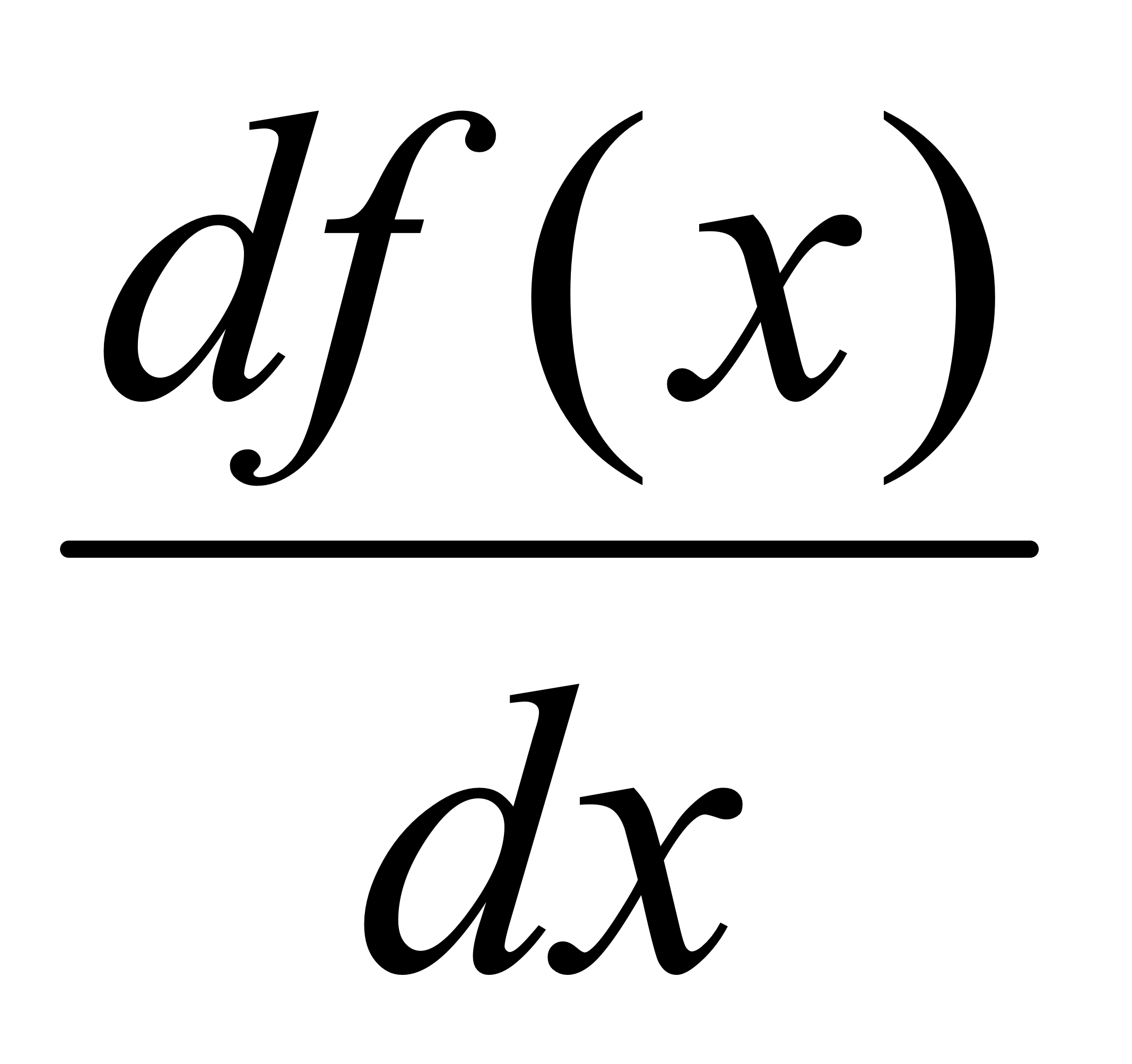
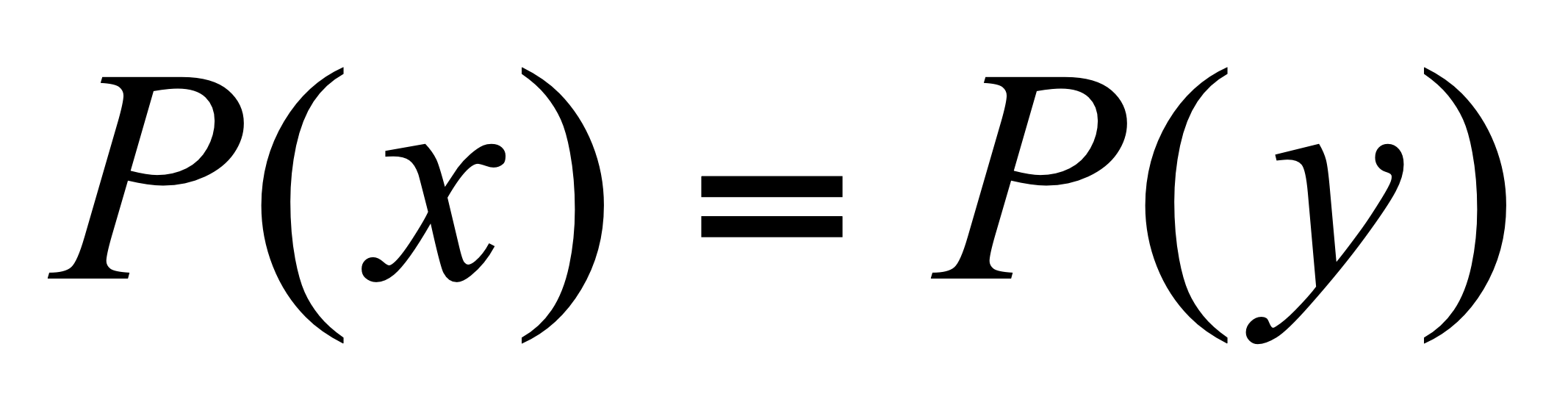
Найдем формулу преобразования плотности вероятности  к , если :

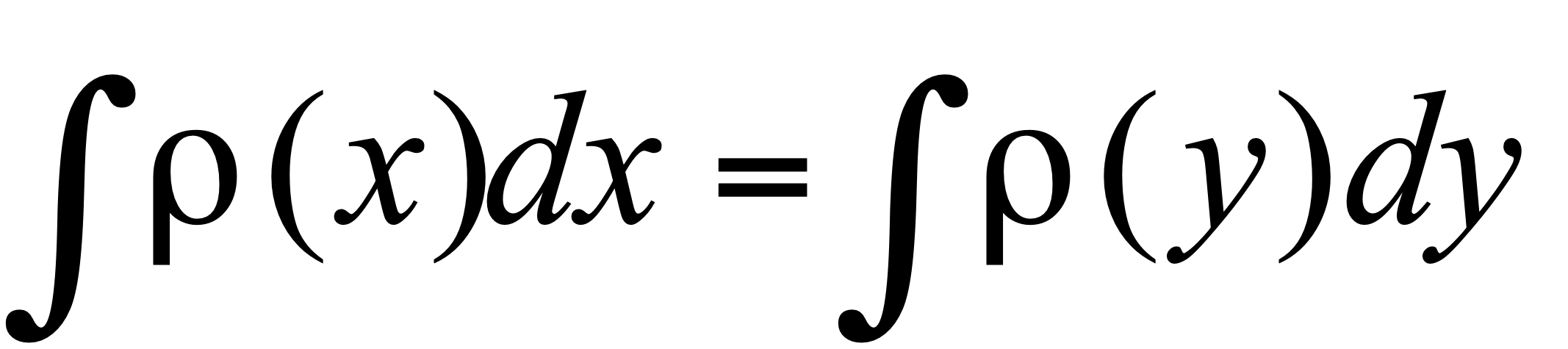
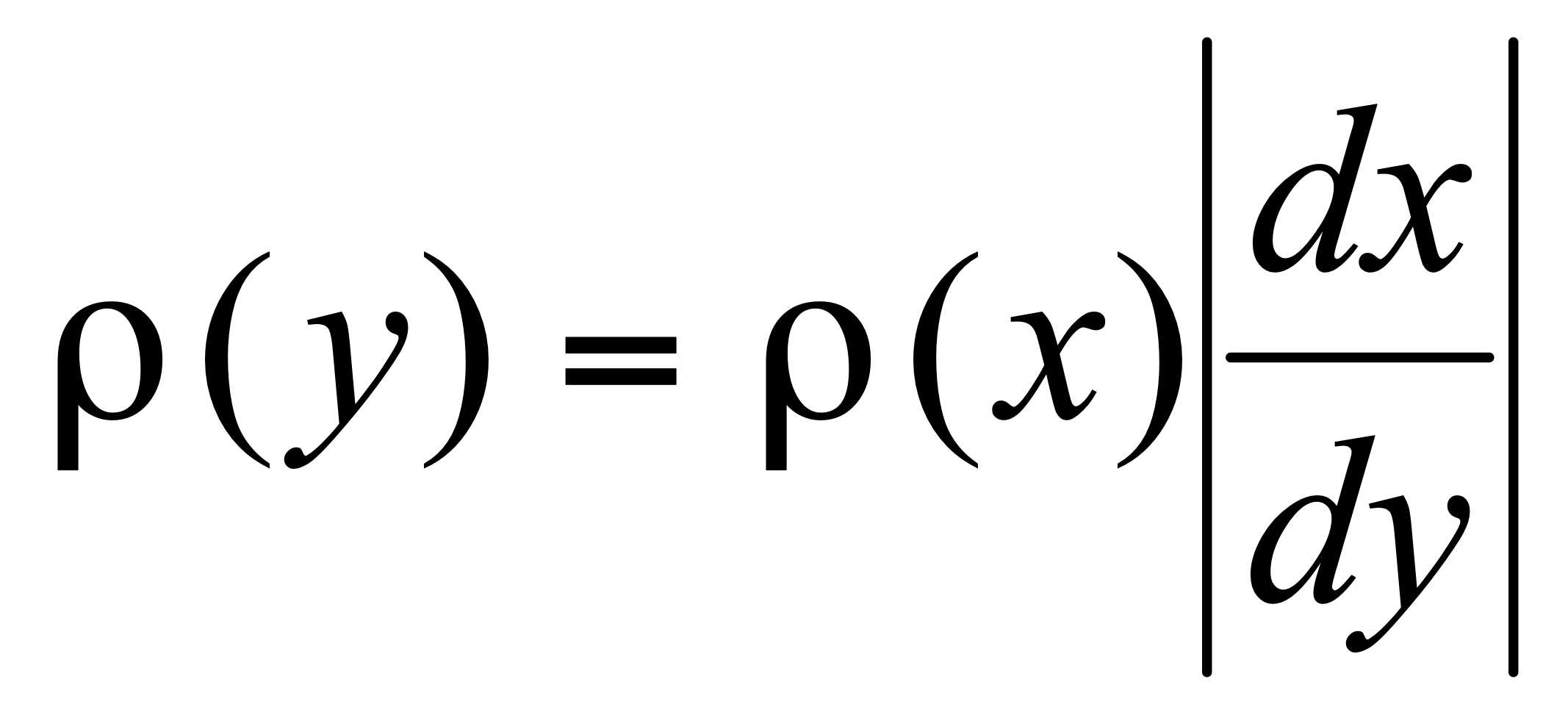
, (13)

где мы переменную интегрирования приняли . Для случая (если можно выражать  через  однозначно) проведя интегрирование в (13) по через преобразование

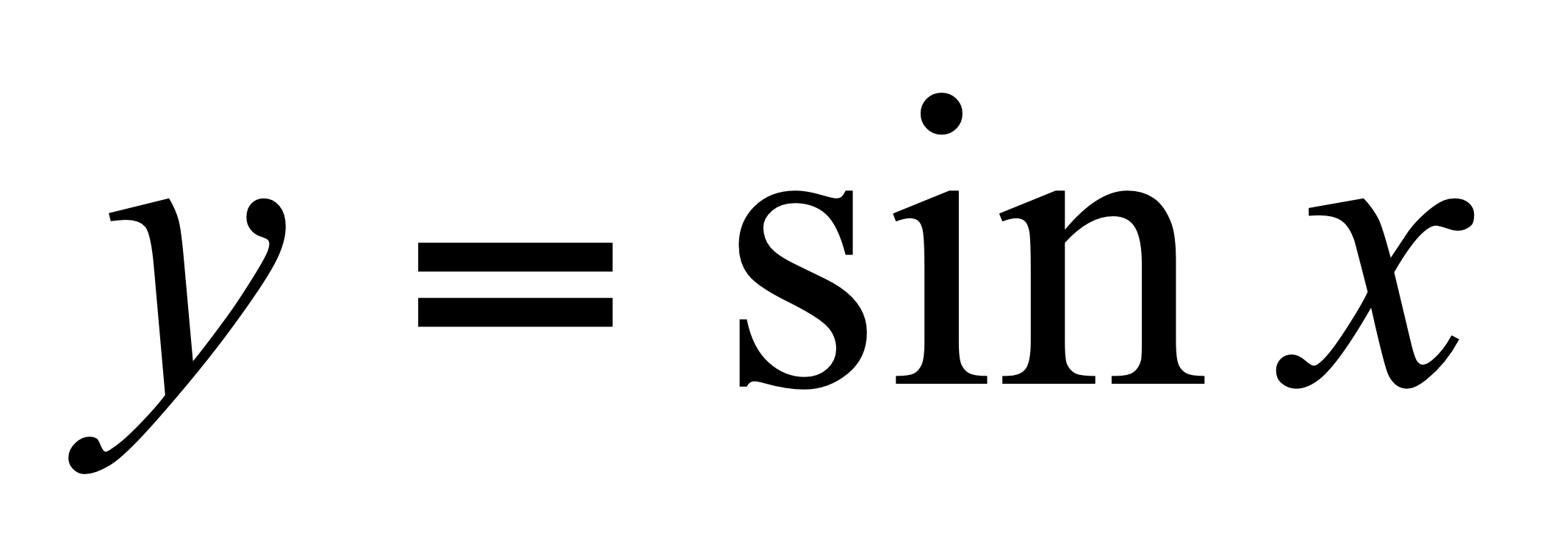
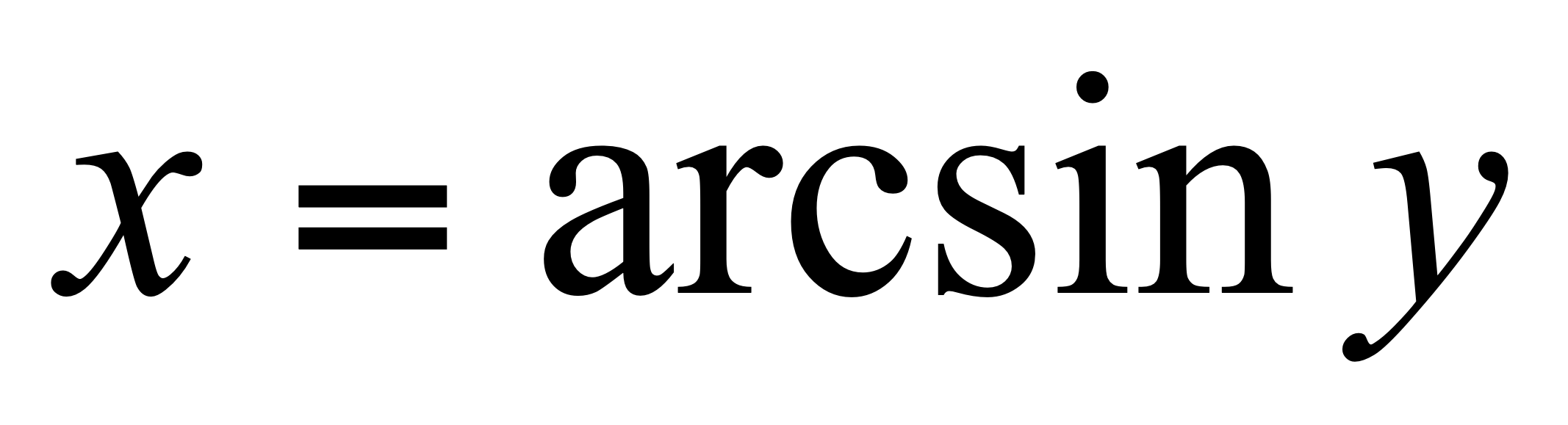
, получим

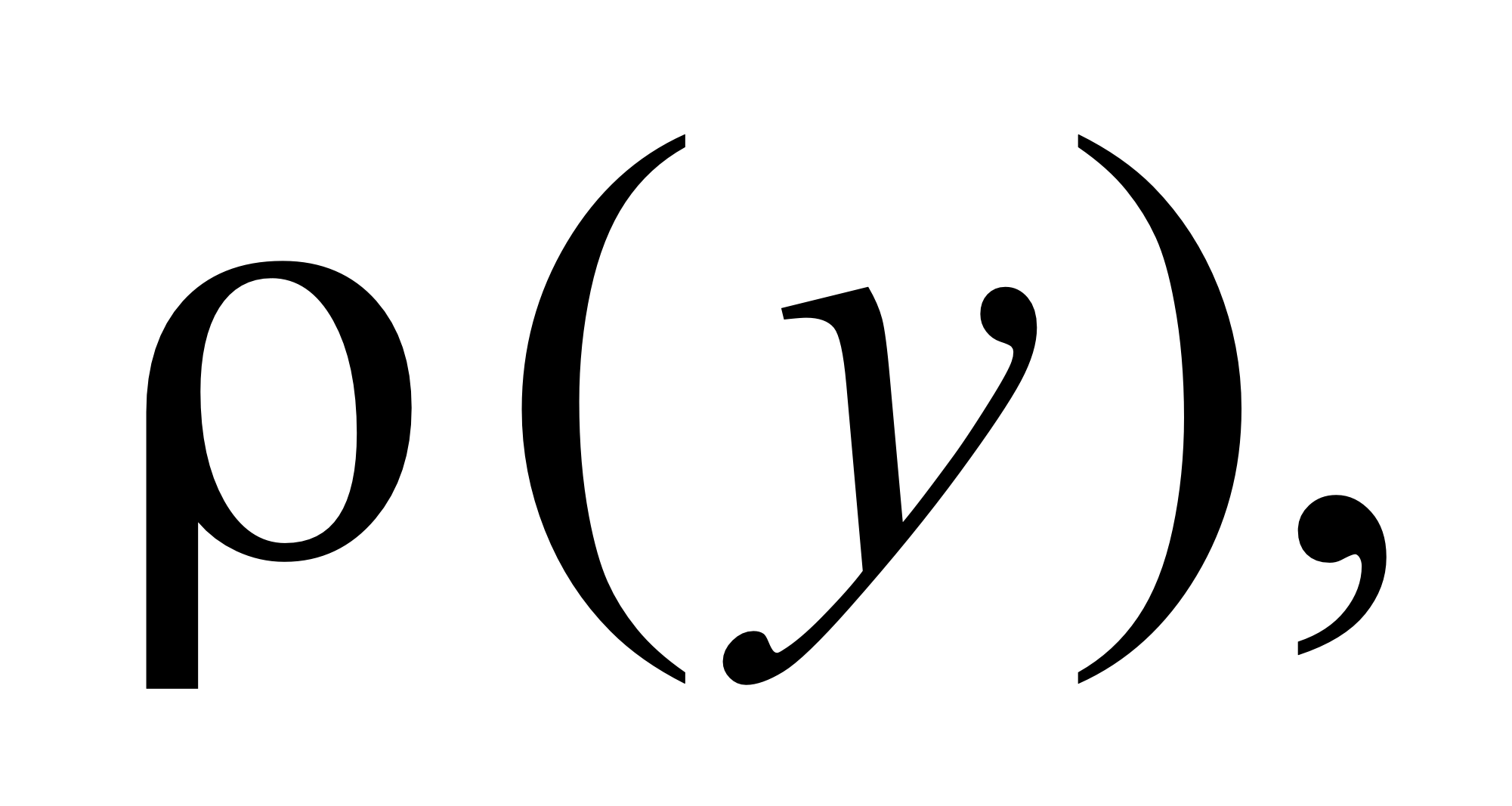
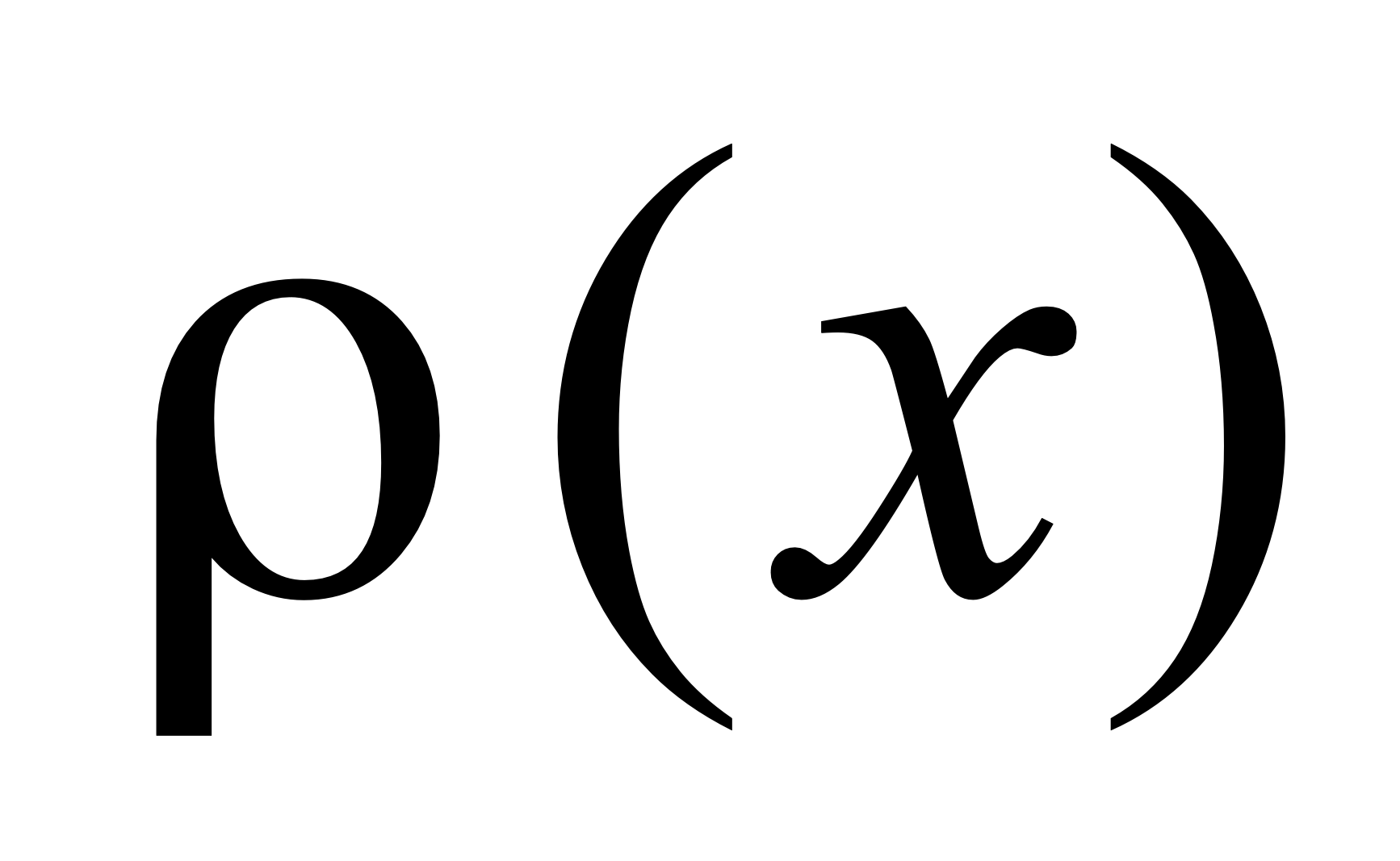
 (14)

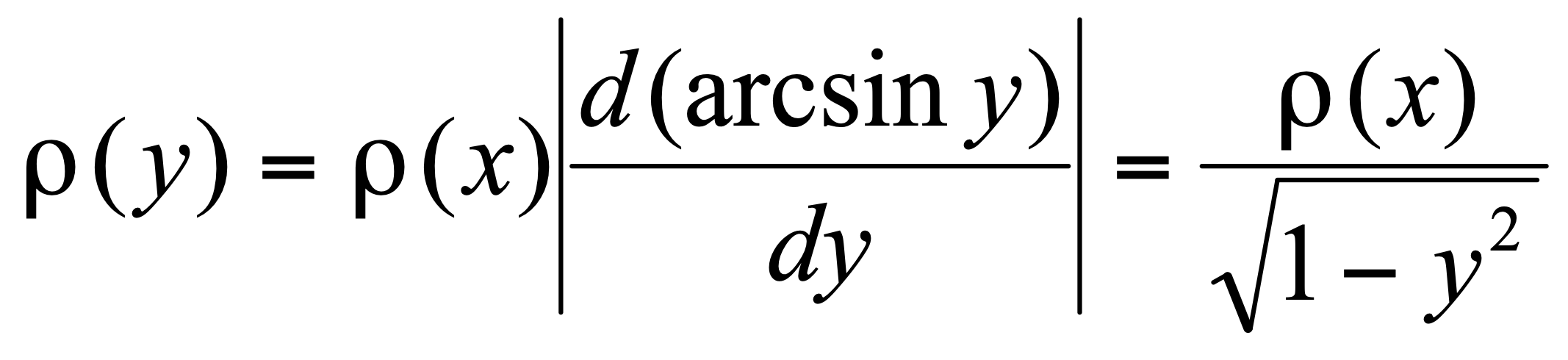
где в правой части нужно подставить . Производная  взята по модулю, так как плотность вероятности всегда положительная величина. Для стационарного случая формулу (14) легко получить из условия сохранения вероятности :

,  . (15)

В качестве примера рассмотрим функцию

,  (16)

и найдем  считая  известной. По формуле (15)

 . (17)

Темы самостоятельных работ

1. Вероятностные характеристики случайных процессов. Математическое ожидание и дисперсия
2. Нормальный случайный процесс.
3. Интервал корреляции. Эффективная ширина спектра. База сигнала

Литература [ 2, 6]